Отчет о результатах методического анализа результатов ЕГЭ по математике (профильный уровень) в Алтайском крае в 2015 году

1. Характеристика участников ЕГЭ

Количество участников ЕГЭ по предмету (за последние 3 года)

Предмет	2013		2014		2015	
	чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников
Математика профильная	13437	94,54	12037	96,09	8439	71,01

В ЕГЭ по математике (профильный уровень) в 2015 году приняли участие 8439 человек, из них 47,75% - юношей, 52,25% - девушек.

Количество участников ЕГЭ по категориям

Категории участников ЕГЭ	**чел.**	**%**
Всего участников ЕГЭ по предмету	8439	100,00
- Выпускник общеобразовательного учреждения текущего года	8238	97,62
- Обучающийся образовательного учреждения среднего профессионального образования	22	0,26
- Выпускник прошлых лет	174	2,06
- Выпускник, не завершивший среднее (полное) общее образование (не прошедший ГИА)	5	0,06

Количество участников по типам ОО (в соответствии с кластеризацией, принятой в регионе)

Типы образовательных организаций	**чел.**	**%**
Всего участников ЕГЭ (выпускников) по предмету	**8238**	**100,00**

- Средняя общеобразовательная школа	5628	68,32
- Средняя общеобразовательная школа с углубленным изучением отдельных предметов	351	4,26
- Гимназия	998	12,11
- Лицей	925	11,23
- Лицей-интернат	110	1,34
- Кадетская школа-интернат	56	0,68
- Общеобразовательная школа-интернат с первоначальной летной подготовкой	99	1,20
- Специальная (коррекционная) общеобразовательная школа	4	0,05
- Специальная (коррекционная) школа-интернат	1	0,01
- Вечерняя (сменная) общеобразовательная школа	22	0,27
- Открытая (сменная) общеобразовательная школа	41	0,50
- Техникум	3	0,04

Количество участников ЕГЭ по предмету по административным образованиям региона

Административно-территориальные единицы	**Количество участников ЕГЭ по предмету**	**в % к общему числу выпускников**
Всего участников ЕГЭ (выпускников) по предмету	8238	72,47
Алейский район	48	59,26
Алтайский район	67	62,04
Баевский район	38	55,88
Бийский район	101	81,45
Благовещенский район	129	87,16
Бурлинский район	48	68,57
Быстроистокский район	40	68,97
Волчихинский район	70	72,92
Егорьевский район	32	82,05
Ельцовский район	15	50,00
Завьяловский район	108	81,20
Залесовский район	41	87,23
Змеиногорский район	64	73,56

Заринский район	74	87,06
Зональный район	49	53,85
Калманский район	47	68,12
Каменский район	39	60,00
Ключевский район	55	53,92
Косихинский район	32	58,18
Красногорский район	60	64,52
Краснощековский район	64	61,54
Крутихинский район	43	67,19
Кулундинский район	73	59,35
Курьинский район	32	64,00
Кытмановский район	64	68,82
Локтевский район	98	77,78
Мамонтовский район	97	97,98
Михайловский район	79	68,10
Немецкий национальный район	57	60,64
Новичихинский район	41	78,85
Павловский район	113	77,40
Панкрушихинский район	34	61,82
Первомайский район	128	71,91
Петропавловский район	52	54,17
Поспелихинский район	105	82,68
Ребрихинский район	62	60,19
Родинский район	66	81,48
Романовский район	51	85,00
Рубцовский район	42	65,63
ЗАТО Сибирский	53	96,36
Смоленский район	63	67,02
Советский район	51	58,62
Солонешенский район	43	81,13
Солтонский район	19	45,24
Суетский район	13	44,83
Табунский район	28	41,18
Тальменский район	126	86,90

Тогульский район	33	76,74
Топчихинский район	79	67,52
Третьяковский район	54	72,97
Троицкий район	72	62,61
Тюменцевский район	48	57,14
Угловский район	40	45,98
Усть-Калманский район	53	80,30
Усть-Пристанский район	42	64,62
Хабарский район	67	69,79
Целинный район	39	52,70
Чарышский район	61	72,62
Шипуновский район	110	67,48
Шелаболихинский район	36	50,70
г. Алейск	98	72,59
г. Барнаул	2245	73,73
г. Белокуриха	33	41,77
г. Бийск	695	84,86
г. Заринск	173	84,80
г. Камень-на-Оби	135	85,99
г. Новоалтайск	257	79,08
г. Рубцовск	443	69,44
г. Славгород	121	67,98
г. Яровое	68	85,00
Краевые образовательные организации	357	75,32
Краевые коррекционные образовательные организации	5	29,41
Негосударственные образовательные организации	20	83,33

ВЫВОД о характере изменения количества участников ЕГЭ.

ЕГЭ по математике (профильный уровень) проводится впервые, поэтому динамика количества участников ЕГЭ не отмечается.

2. Краткая характеристика КИМ по предмету

Работа ЕГЭ по математике профильного уровня в 2015 г. состоит из двух частей и содержит 21 задание. Сохраняется преемственность в тематике, примерном содержании и уровне сложности заданий. Однако по сравнению с моделью 2014 г. имеются изменения. С целью оптимизации структуры варианта в условиях перехода к двухуровневому экзамену из первой части исключено одно задание практической направленности, а во вторую часть добавлено задание профильного уровня (19) с экономическим содержанием.

Часть 1 работы ЕГЭ по математике профильного уровня содержит 9 заданий (задания 1–9) с кратким числовым ответом, проверяющих наличие практических математических знаний и умений базового уровня. Часть 2 содержит 12 заданий по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки. Из них пять заданий (задания 10–14) с кратким ответом и семь заданий (задания 15–21) с развёрнутым ответом. В соответствии с действующими нормативными документами результат выполнения экзаменационной работы не влияет на аттестационную отметку выпускника. По результатам ЕГЭ устанавливается минимальный балл, достижение которого необходимо для получения аттестата о среднем (полном) общем образовании. В этих условиях выполнение заданий части 1 экзаменационной работы (задания 1–9) свидетельствует о наличии общематематических умений, необходимых человеку в современном обществе. Задания этой части проверяют базовые вычислительные и логические умения и навыки, умение анализировать информацию, представленную на графиках и в таблицах, использовать простейшие вероятностные и статистические модели, ориентироваться в простейших геометрических конструкциях. В часть 1 работы включены задания по всем основным разделам предметных требований ФГОС: геометрия (планиметрия и стереометрия), алгебра, начала математического анализа, теория вероятностей и статистика.

В целях более эффективного отбора выпускников для продолжения образования в высших учебных заведениях с различными требованиями к уровню математической подготовки выпускников задания части 2 работы ЕГЭ по математике профильного уровня предназначены для проверки знаний на том уровне требований, которые традиционно предъявляются вузами с профильным экзаменом по математике. Последние три задания части 2 предназначены для конкурсного отбора в вузы с повышенными требованиями к математической подготовке абитуриентов.

3. Основные результаты ЕГЭ по предмету

3.1. В текущем году:

Средний балл ЕГЭ по предмету в регионе в регионе - 41,51, средний балл по предмету выпускников текущего года - 41,91.

Основные результаты:

Категория участников	Участников, набравших баллов ниже минимального значения		Участников, получивших от 81 до 100 баллов		Участников, получивших 100 баллов	
	количество участников	в % к общему числу участников ЕГЭ по предмету	количество участников	в % к общему числу участников ЕГЭ по предмету	количество участников	в % к общему числу участников ЕГЭ по предмету
Все категории участников, в т.ч.	1475	17,48	63	0,75	0	0,00
- Выпускник общеобразовательного учреждения текущего года	1359	16,10	62	0,73	0	0,00
- Обучающийся образовательного учреждения среднего профессионального образования	14	0,17	0	0,00	0	0,00
- Выпускник прошлых лет	100	1,18	1	0,01	0	0,00
- Выпускник, не завершивший среднее (полное) общее образование (не прошедший ГИА)	2	0,02	0	0,00	0	0,00

Диаграмма распределения участников ЕГЭ по предмету по тестовым баллам

Тестовый балл	Все категории участников		Выпускники текущего года	
	количество	%	количество	%
0	1	0,01	1	0,01
5	41	0,52	30	0,39
9	131	1,66	113	1,47

14	254	3,22	225	2,92
18	442	5,60	413	5,37
23	606	7,67	577	7,50
27	973	12,32	950	12,35
33	968	12,26	955	12,41
39	897	11,36	875	11,37
45	778	9,85	769	9,99
50	611	7,74	608	7,90
55	512	6,48	506	6,58
59	386	4,89	384	4,99
64	323	4,09	322	4,18
68	265	3,36	264	3,43
70	210	2,66	208	2,70
72	151	1,91	150	1,95
74	121	1,53	121	1,57
76	81	1,03	81	1,05
78	53	0,67	52	0,68
80	29	0,37	29	0,38
82	20	0,25	19	0,25
84	15	0,19	15	0,19
86	14	0,18	14	0,18
88	6	0,08	6	0,08
90	3	0,04	3	0,04
92	2	0,03	2	0,03
96	1	0,01	1	0,01
97	2	0,03	2	0,03

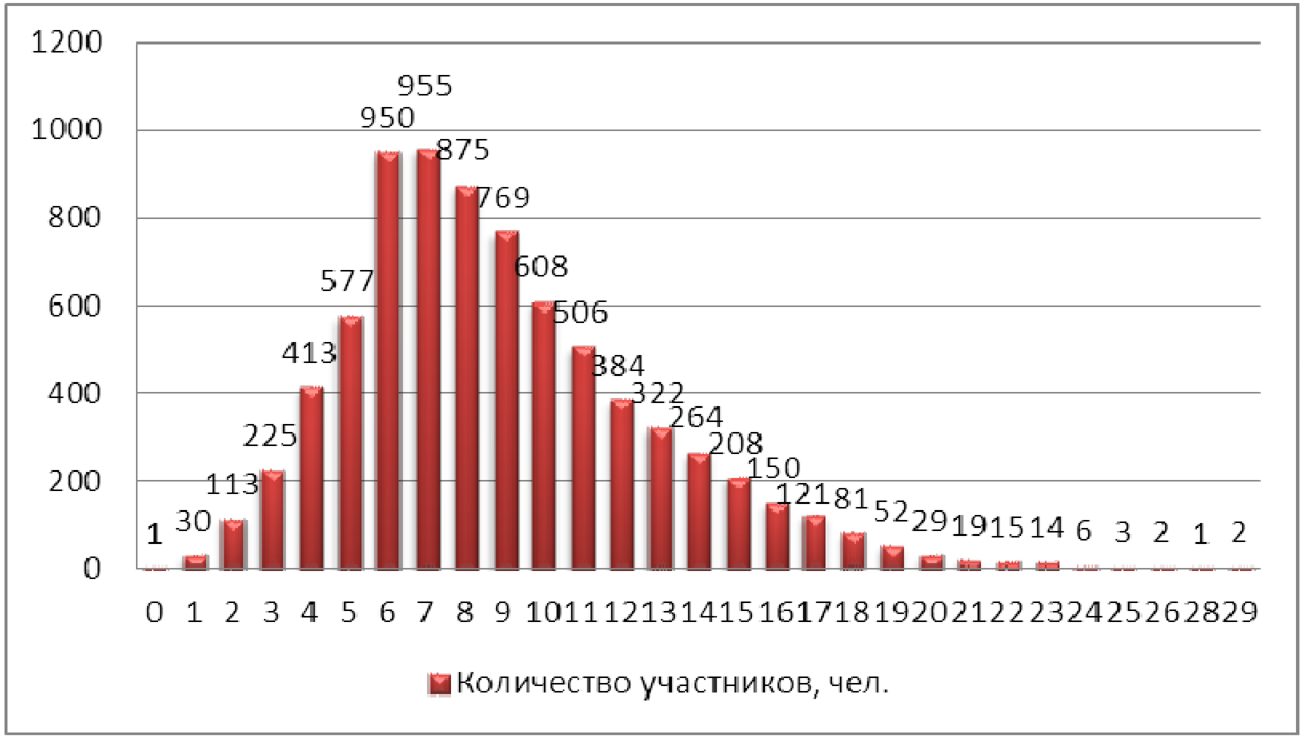


Рис. 1. Распределение числа участников по полученным тестовым баллам (математика, профильный уровень)

Результаты по категориям участников ЕГЭ

Категория участников	Доля участников, набравших баллов ниже минимального значения	Средний балл	Доля участников, получивших от 81 до 100 баллов	Количество участников, получивших 100 баллов
Все категории участников, в т.ч.	17,48	41,51	0,75	0
- Выпускник общеобразовательного учреждения текущего года	16,10	41,91	0,73	0
- Обучающийся образовательного учреждения среднего профессионального образования	0,17	23,14	0,00	0
- Выпускник прошлых лет	1,18	26,54	0,01	0
- Выпускник, не завершивший среднее (полное) общее образование (не прошедший ГИА)	0,02	20,00	0,00	0

Сравнение результатов по ОО: Отношение среднего балла 10% лучших ОО к среднему баллу 10% худших ОО по предмету (за последние 3 года)

Год	Средний балл ЕГЭ в 10% ОО с лучшими результатами	Средний балл ЕГЭ в 10% ОО с худшими результатами	Отношение среднего балла ЕГЭ в 10% ОО с лучшими результатами к среднему баллу ЕГЭ в 10% ОО с худшими результатами
2013	59,03	29,08	2,03
2014	57,40	29,30	1,96
2015	57,57	23,20	2,48

3.2. Динамика результатов ЕГЭ по предмету за последние 3 года

Год	Не преодолели минимальной границы	Средний балл	Набрали от 81 до 100 баллов	Получили 100 баллов
2013	704	46,56	335	8
2014	94	45,56	55	0
2015	1475	41,51	63	0

3.3. Основные результаты ЕГЭ по предмету в сравнении по административно территориальным единицам

Административно территориальная единица	Не преодолели минимальной границы	Средний балл	Набрали от 81 до 100 баллов	Получили 100 баллов
Итого (выпускники текущего года) по предмету	1359	41,91	62	0
Алейский район	9	37,67	0	0
Алтайский район	6	40,76	0	0
Баевский район	8	43,47	0	0
Бийский район	3	43,99	0	0
Благовещенский район	19	43,00	0	0

Административно территориальная единица	Не преодолели минимальной границы	Средний балл	Набрали от 81 до 100 баллов	Получили 100 баллов
Бурлинский район	0	43,55	0	0
Быстроистокский район	10	37,18	0	0
Волчихинский район	3	49,88	0	0
Егорьевский район	1	53,56	0	0
Ельцовский район	3	40,80	0	0
Завьяловский район	4	43,71	0	0
Залесовский район	8	35,53	0	0
Змеиногорский район	9	44,54	1	0
Заринский район	15	37,73	0	0
Зональный район	1	48,00	0	0
Калманский район	7	40,00	0	0
Каменский район	7	37,57	0	0
Ключевский район	3	44,19	0	0
Косихинский район	8	43,16	0	0
Красногорский район	20	33,26	0	0
Краснощековский район	14	38,21	0	0
Крутихинский район	8	38,22	0	0
Кулундинский район	14	37,41	0	0
Курьинский район	7	38,35	0	0
Кытмановский район	5	43,44	0	0
Локтевский район	10	45,04	0	0
Мамонтовский район	0	43,25	0	0
Михайловский район	20	39,66	0	0
Немецкий национальный район	2	42,14	0	0
Новичихинский район	4	44,68	0	0
Павловский район	10	44,93	0	0
Панкрушихинский район	1	41,75	0	0
Первомайский район	25	36,92	0	0
Петропавловский район	4	41,83	0	0
Поспелихинский район	27	38,19	0	0

Административно территориальная единица	Не преодолели минимальной границы	Средний балл	Набрали от 81 до 100 баллов	Получили 100 баллов
Ребрихинский район	9	38,92	0	0
Родинский район	11	39,91	0	0
Романовский район	0	50,44	0	0
Рубцовский район	9	32,34	0	0
ЗАТО Сибирский	15	36,85	0	0
Смоленский район	16	39,17	0	0
Советский район	13	34,15	0	0
Солонешенский район	9	43,50	0	0
Солтонский район	0	47,79	0	0
Суетский район	1	49,92	0	0
Табунский район	5	41,32	0	0
Тальменский район	12	44,88	0	0
Тогульский район	13	36,81	0	0
Топчихинский район	15	36,77	0	0
Третьяковский район	9	36,91	0	0
Троицкий район	2	47,94	0	0
Тюменцевский район	8	41,37	0	0
Угловский район	1	48,82	0	0
Усть-Калманский район	8	40,33	0	0
Усть-Пристанский район	12	33,29	0	0
Хабарский район	15	38,36	0	0
Целинный район	7	35,83	0	0
Чарышский район	9	39,28	0	0
Шипуновский район	17	38,20	0	0
Шелаболихинский район	2	46,55	0	0
г. Алейск	18	40,78	0	0
г. Барнаул	461	42,85	46	0
г. Белокуриха	12	32,97	0	0
г. Бийск	129	41,17	4	0
г. Заринск	11	44,68	1	0

Административно территориальная единица	Не преодолели минимальной границы	Средний балл	Набрали от 81 до 100 баллов	Получили 100 баллов
г. Камень-на-Оби	37	39,59	2	0
г. Новоалтайск	50	39,94	0	0
г. Рубцовск	80	39,77	1	0
г. Славгород	11	43,21	0	0
г. Яровое	2	47,41	0	0
Краевые образовательные организации	31	47,98	7	0
Краевые коррекционные образовательные организации	0	37,00	0	0
Негосударственные образовательные организации	4	44,50	0	0

ВЫВОД о характере изменения результатов ЕГЭ по предмету

ЕГЭ по математике (профильный уровень) проводится впервые, поэтому динамика изменения результатов ЕГЭ не отмечается.

4. Анализ результатов выполнения отдельных заданий или групп заданий.

Обозначение задания в работе	Проверяемые элементы содержания	Проверяемые умения	Уровень сложности задания	Средний процент выполнения по региону (все категории участников)
1	Целые числа. Дроби, проценты, рациональные числа. Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений.	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.	Базовый	89,41

Обозначение задания в работе	Проверяемые элементы содержания	Проверяемые умения	Уровень сложности задания	Средний процент выполнения по региону (все категории участников)
2	Функция, область определения функции. Множество значений функции. График функции. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях. Табличное и графическое представление данных.	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.	Базовый	98,67
3	Преобразования выражений, включающих арифметические операции. Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений. Табличное и графическое представление данных.	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.	Базовый	69,24
4	Планиметрия. Измерение геометрических величин.	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами.	Базовый	91,01
5	Элементы теории вероятностей.	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели.	Базовый	71,88
6	Уравнения.	Уметь решать уравнения и неравенства.	Базовый	21,38

Обозначение задания в работе	Проверяемые элементы содержания	Проверяемые умения	Уровень сложности задания	Средний процент выполнения по региону (все категории участников)
7	Треугольник. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат. Трапеция. Окружность и круг. Величина угла, градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности. Угол между прямыми в пространстве; угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями. Длина отрезка, ломаной, окружности, периметр многоугольника. Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости; расстояние между параллельными и скрещивающимися прямыми, расстояние между параллельными плоскостями. Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора.	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами.	Базовый	58,00
8	Производная. Исследование функций. Первообразная и интеграл.	Уметь выполнять действия с функциями.	Базовый	44,61
9	Прямые и плоскости в пространстве. Многогранники. Тела и поверхности вращения. Измерение геометрических величин.	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами.	Базовый	63,11

Обозначение задания в работе	Проверяемые элементы содержания	Проверяемые умения	Уровень сложности задания	Средний процент выполнения по региону (все категории участников)
10	Целые числа. Степень с натуральным показателем. Дроби, проценты, рациональные числа. Степень с целым показателем.	Уметь выполнять вычисления и преобразования.	Повышенный	70,40
11	Уравнения. Неравенства.	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.	Повышенный	39,95
12	Прямые и плоскости в пространстве. Многогранники. Тела и поверхности вращения. Измерение геометрических величин.	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами.	Повышенный	23,99
13	Уравнения. Неравенства.	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели.	Повышенный	16,04
14	Производная. Исследование функций.	Уметь выполнять действия с функциями.	Повышенный	28,40
15	Уравнения. Неравенства.	Уметь решать уравнения и неравенства.	Повышенный	23,72

Обозначение задания в работе	Проверяемые элементы содержания	Проверяемые умения	Уровень сложности задания	Средний процент выполнения по региону (все категории участников)
16	Прямые и плоскости в пространстве. Многогранники. Тела и поверхности вращения. Измерение геометрических величин. Координаты и векторы.	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами.	Повышенный	9,84
17	Уравнения. Неравенства.	Уметь решать уравнения и неравенства.	Повышенный	8,95
18	Планиметрия.	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами.	Повышенный	0,71
19	Целые числа. Дроби, проценты, рациональные числа. Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений.	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.	Повышенный	1,00
20	Уравнения. Неравенства. Элементарное исследование функций. Основные элементарные функции.	Уметь решать уравнения и неравенства.	Высокий	0,28
21	Целые числа. Степень с натуральным показателем. Дроби, проценты, рациональные числа. Степень с целым показателем.	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели.	Высокий	1,33

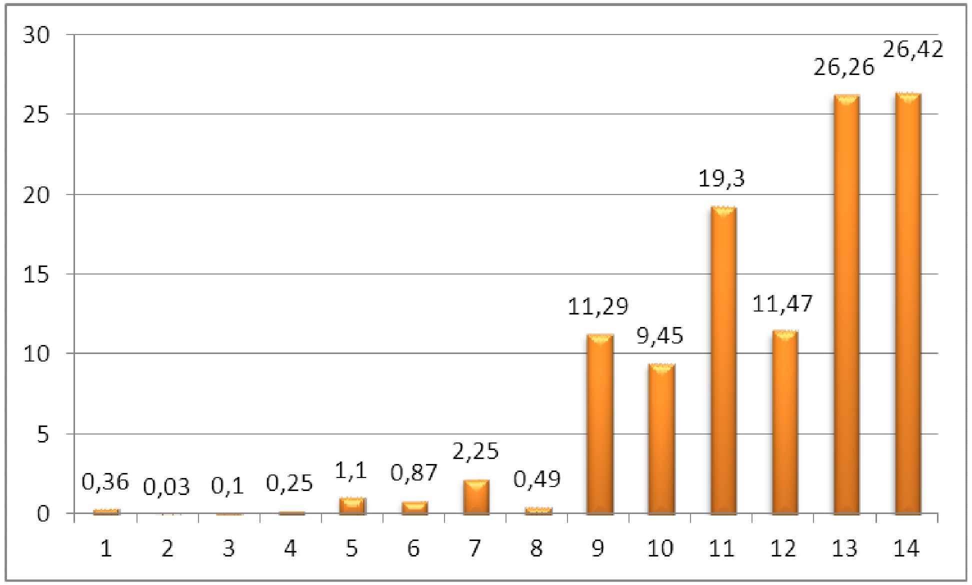


Рис. 2. Проценты участников экзамена не приступивших к выполнению заданий с кратким ответом (математика, профильный уровень)

Анализ данных, представленных в таблице, и изучение статистических данных о доле участников экзамена, не приступивших к выполнению отдельных задач (Рис. 2), позволяют сделать ряд следующих выводов.

1. Положительным результатом экзамена по математике профильного уровня является овладение значительной частью выпускников школ умениями использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни (проверяемое заданием 2), умениями выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами (проверяемое заданием 4).

2. Участниками экзамена по математике профильного уровня продемонстрирован не достаточно высокий уровень умений:

- выполнять действия с функциями (проверяемое заданием 8);
- решать уравнения и неравенства (проверяемое заданием 17);

3. О наиболее существенных проблемах качества математической подготовки учащихся свидетельствуют низкие результаты, полученные при решении задач, нацеленных на проверку умений:

- решать показательные уравнения (проверяемое заданием 6);
- выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами (проверяемое заданием 12);
- строить и исследовать простейшие математические модели (проверяемое заданиями 13, 18);
- выполнять действия с функциями (проверяемое заданием 14);
- использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни (проверяемое заданием 19).

3. Наиболее трудными для участников ЕГЭ по математике профильного уровня оказались задания 9, 11, 12, 13, 14, к решению которых не приступило более 10% экзаменуемых (См. рис. 1).

На рис. 3- 9 наглядно представлены результаты в первичных баллах по задачам с развёрнутым ответом экзаменационной работы.

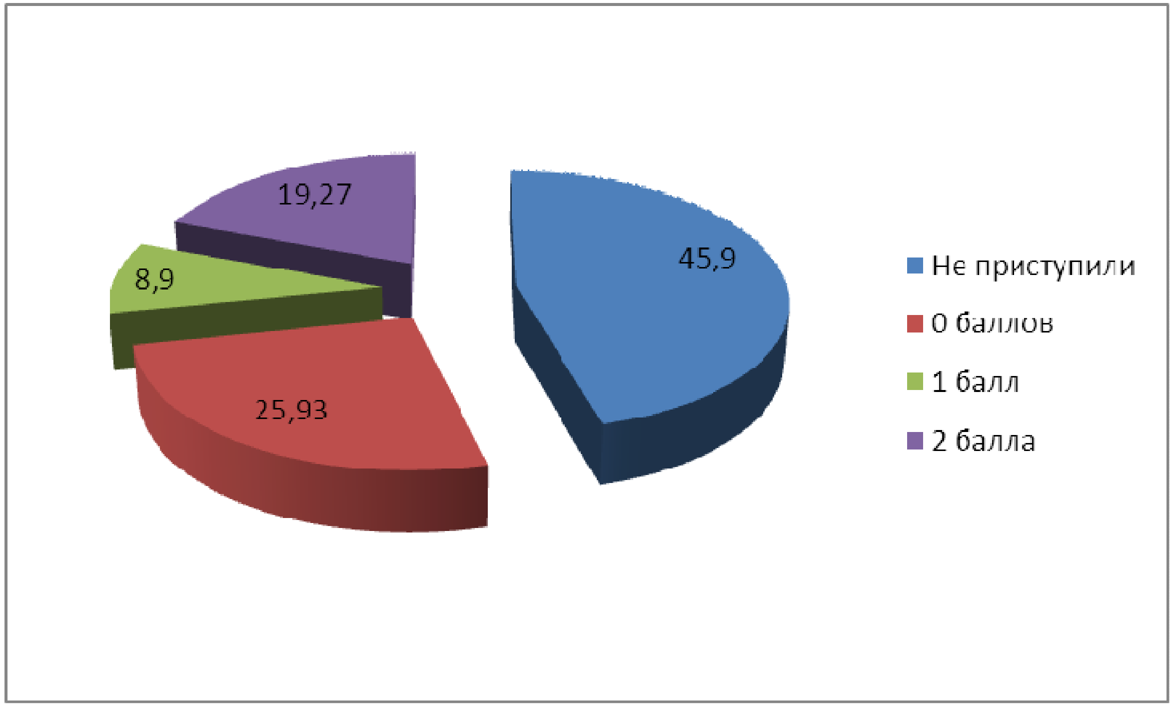


Рис. 3. Результаты выполнения задания 15 в первичных баллах

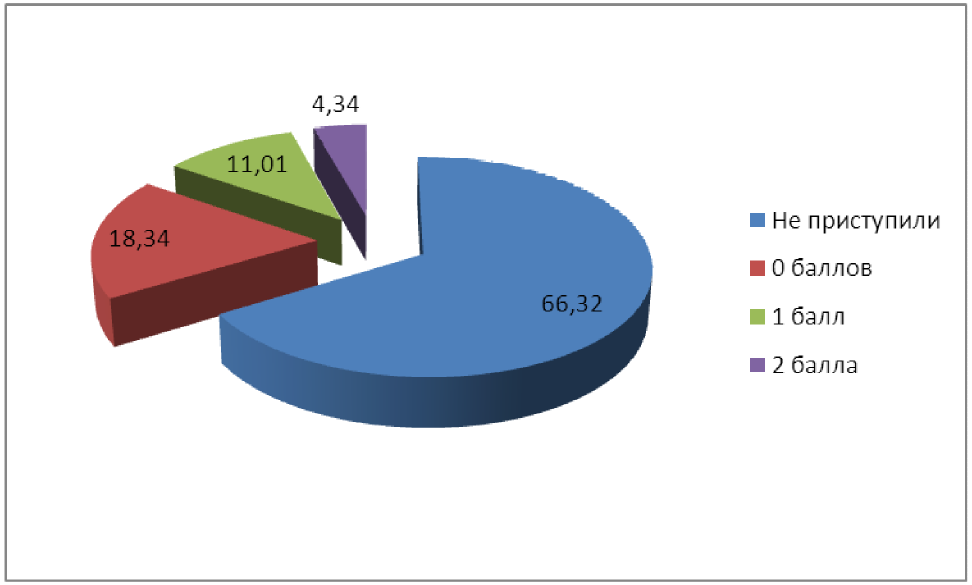


Рис. 4. Результаты выполнения задания 16 в первичных баллах

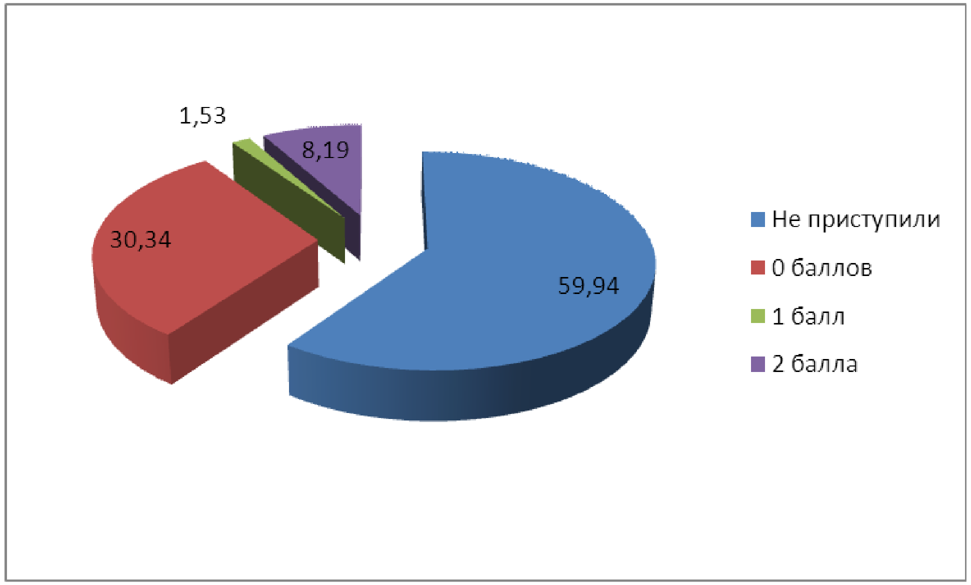


Рис. 5. Результаты выполнения задания 17 в первичных баллах

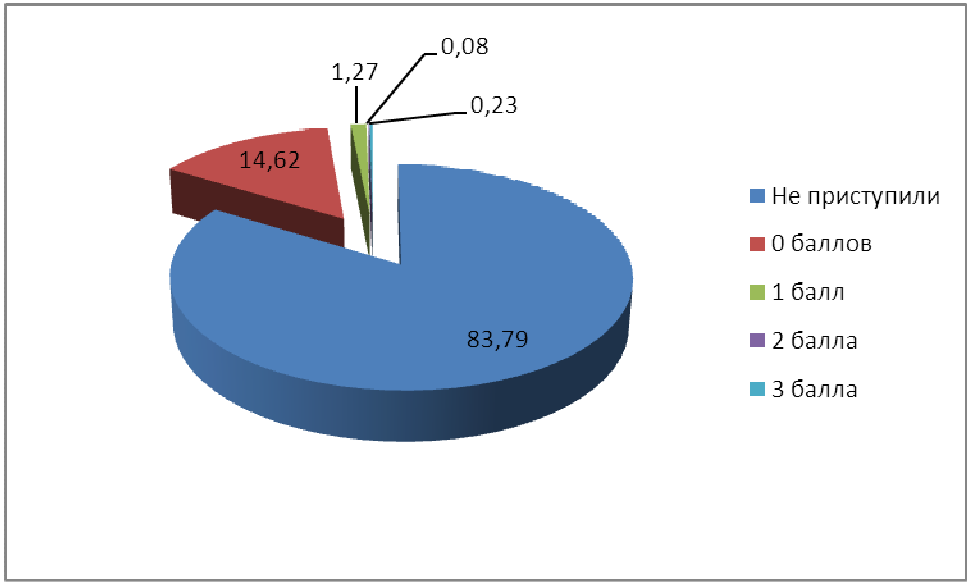


Рис. 6. Результаты выполнения задания 18 в первичных баллах

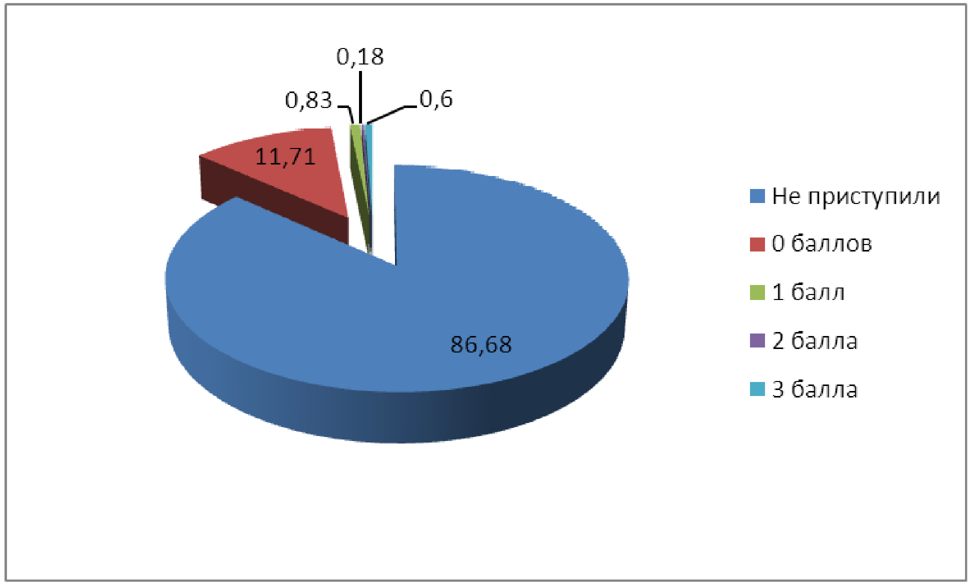


Рис. 7. Результаты выполнения задания 19 в первичных баллах

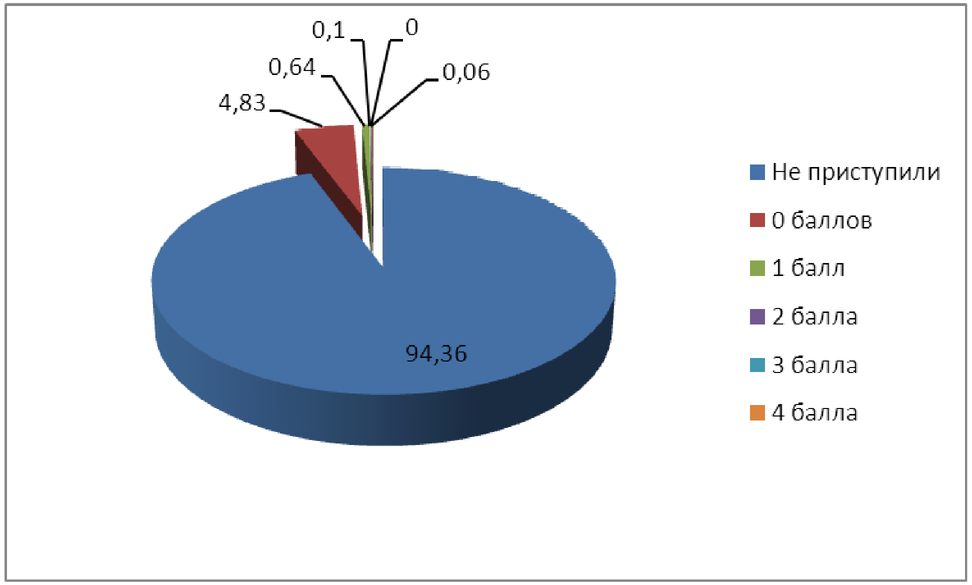


Рис. 8. Результаты выполнения задания 20 в первичных баллах

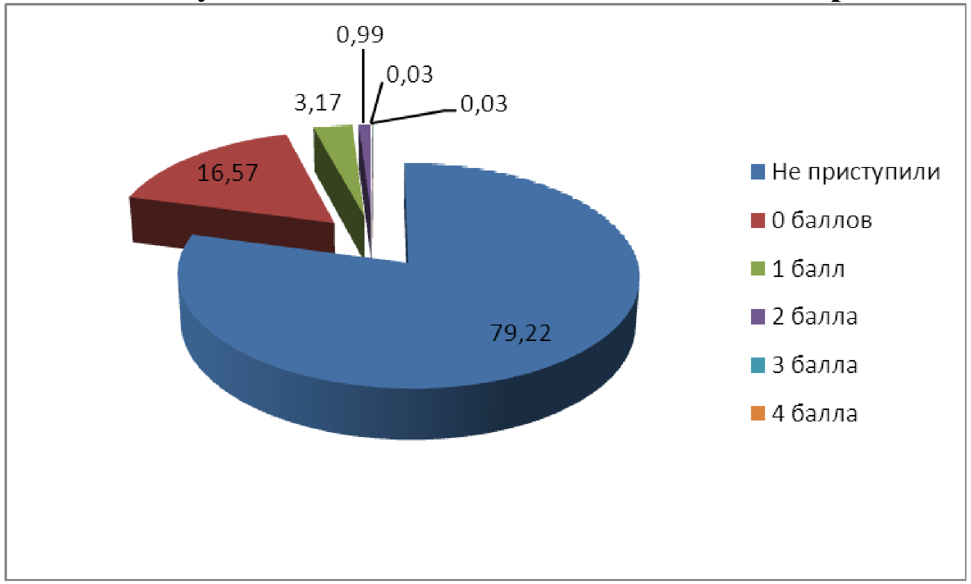


Рис. 9. Результаты выполнения задания 21 в первичных баллах

Типичные ошибки, допущенные участниками экзамена при решении задач с развёрнутым ответом

Задача 15

В профильном ЕГЭ 2015 года модель задачи 15 (ранее – задача С1) не претерпела никаких изменений по сравнению с прошлым годом. Уже традиционно, это была задача, состоящая из двух пунктов: решить тригонометрическое уравнение и отобрать корни уравнения из указанного промежутка.

Задача 15 предполагала:

– знание основных тригонометрических формул (основное тригонометрическое тождество);
– владение методом замены переменной при решении уравнения;
– умение решать квадратные уравнения;
– вычислительные навыки работы с числовыми иррациональными выражениями;
– умение решать простейшие тригонометрические уравнения по общим и частным формулам;
– знание области значений тригонометрических функций;
– владение хотя бы одним из способов отбора корней тригонометрического уравнения из указанного промежутка: с помощью единичной окружности, решением двойного неравенства, перебором, с помощью графика функции.

Приведем один из примеров задачи 15:

а) Решите уравнение: $6\cos^2 x + 5\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Типичные ошибки в решениях задачи 15

1. Одной из самых распространенных ошибок при решении задачи 15 в 2015 году были неточности и заблуждения в формулах корней простейших тригонометрических уравнений: использование формулы корней для простейшего тригонометрического уравнения относительно синуса – к уравнению относительно косинуса и

наоборот, неверная периодичность корней, описки и другие ошибки в записи корня. Эти ошибки приводили к тому, что решения уравнения указывались неверно, и как следствие – первый пункт задачи не был выполнен.

Пример 1.

<u>№15</u>.

ОДЗ: $(-\infty; +\infty)$

$6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0$

$6 \cdot (1 - \sin^2 x) + 5\sin x - 2 = 0$

$6 - 6\sin^2 x + 5\sin x - 2 = 0$

$-6\sin^2 x + 5\sin x + 4 = 0$

Обозначим!

$\sin x = t$.

$-6t^2 + 5t + 4 = 0$

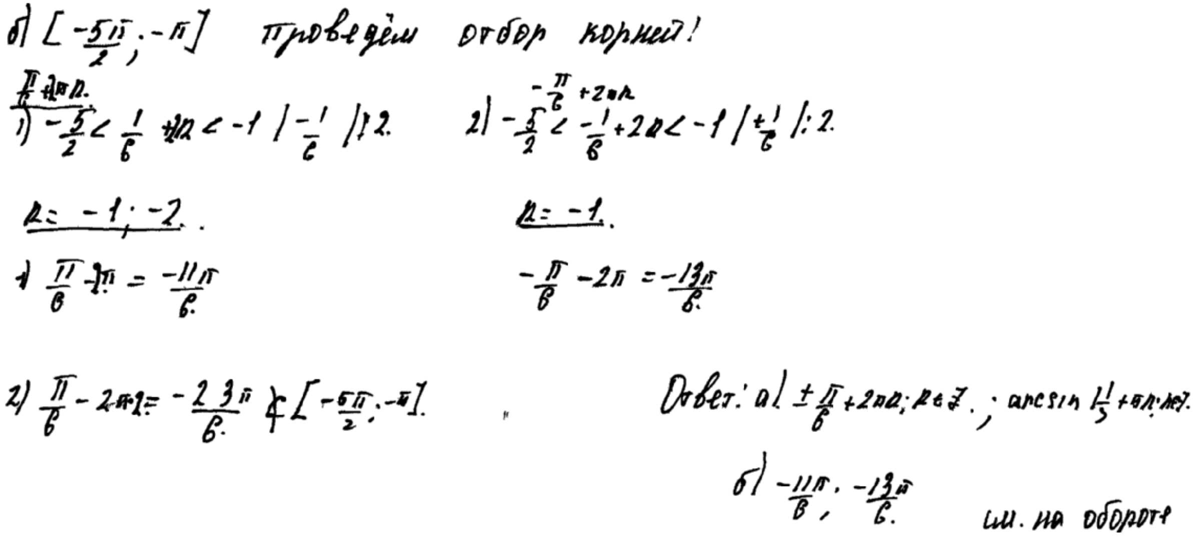
$D = 5^2 - 4 \cdot (-6) \cdot 4 = 25 + 96 = \sqrt{121} = 11$

$t_1 = \dfrac{-5 + 11}{-12} = -\dfrac{1}{2}$. $\quad t_2 = \dfrac{-5 - 11}{-12} = \dfrac{4}{3} = 1\dfrac{1}{3}$.

Получили!

1) $\sin x = \dfrac{-1}{2}$ $\qquad$ 2) $\sin x = 1\dfrac{1}{3}$

$x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$. $\qquad x = (1^k \pm) \pm \arcsin 1\dfrac{1}{3} + \pi n$. $n \in Z$.



б) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ проведём отбор корней!

$\frac{\pi}{6}+2\pi n.$

1) $-\frac{5}{2} < \frac{1}{6} + 2n < -1 \;\Big|\; -\frac{1}{6} \;\Big|\; :2.$

$-\frac{\pi}{6}+2\pi n$

2) $-\frac{5}{2} < -\frac{1}{6} + 2n < -1 \;\Big|\; +\frac{1}{6} \;\Big|\; :2.$

$n = -1; -2.$

$n = -1.$

1) $\frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6}$

$-\frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{13\pi}{6}$

2) $\frac{\pi}{6} - 4\pi = -\frac{23\pi}{6} \notin \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right].$

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n; n\in Z.$; $\arcsin 1\frac{1}{5}+\pi n, n\in Z.$

б) $-\frac{11\pi}{6}; -\frac{13\pi}{6}.$

см. на обороте

Рис. 10.1.

Комментарий: Ошибка учащегося на Рис. 10.1. заключается в незнании формул корней простейшего тригонометрического уравнения. В частности (при нахождении первой серии решений), использование формулы корней простейшего тригонометрического уравнения относительно косинуса как формулы корней уравнения относительно синуса. Эта ошибка была очень распространена среди работ участников экзамена 2015 года. Решение пункта а) содержит еще одну грубую ошибку (о которой будет сказано позднее) – невладение областью значений тригонометрических функций ($\sin x \in [-1;1]$ и $\cos x \in [-1;1]$). При этом, выполняя пункт б), автор работы для своих неправильно найденных корней уравнения верно и обоснованно отбирает корни из указанного промежутка. Однако, это не дает основания эксперту поставить 1 балл, т.к. ошибка в пункте а) не может трактоваться как вычислительная (в соответствии с критериями оценивания). Оценка – 0 баллов.

Пример 2.

15. а) $6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0$

$6(1-\sin^2 x) + 5\sin x - 2 = 0$

$-6\sin^2 x + 5\sin x + 4 = 0$

$6\sin^2 x - 5\sin x - 4 = 0$

$\sin x = t$

$6t^2 - 5t - 4 = 0$

$D = (-5)^2 - 4\cdot 6\cdot(-4) = 121$

$t_1 = \frac{5+11}{12} = \frac{4}{3} \qquad t_2 = \frac{5-11}{12} = -\frac{1}{2}$

$\sin x = \frac{4}{3}$ корней нет

$\sin x = -\frac{1}{2} \quad x = (-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k =$

$= (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \; k \in Z$

Ответ: а) $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$

Рис. 10.2.

Комментарий: Единственной ошибкой в решении пункта а) на рисунке 10.2. является ошибка в записи корня уравнения: $x = (-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k =$ $= (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$ вместо верного решения $x = (-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{2} + \pi k =$ $= (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$. Тем не менее, корни уравнения найдены неправильно, первый пункт задачи не выполнен. Второй пункт отсутствует. Следовательно, оценка – 0 баллов. Ошибка такого характера в задаче 15 также являлась типичной для участников экзамена 2015 года.

2. Не менее редкой ошибкой при решении задачи 15 в 2015 году было неверное вычисление значения обратной тригонометрической функции: либо неверные значения аркфункций, либо неверное преобразование аркфункций отрицательного аргумента. Эти ошибки также приводили к тому, что корни уравнения указывались неверно, и как следствие – первый пункт задачи не был выполнен.

Пример 3.

15. а) $6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0$

$6 - 6\sin^2 x + 5\sin x - 2 = 0$

$6\sin^2 x - 5\sin x - 4 = 0$

$6t^2 - 5t - 4 = 0$

$D = 25 + 96 = 121$

$\sqrt{D} = 11$

$t_1 = \frac{5+11}{12} = \frac{16}{12}$

$t_2 = \frac{5-11}{12} = \frac{-\cancel{6}\,1}{\cancel{12}\,2}$

Пусть $\sin x = t$

$t \neq 0$

$t \neq \pi k,\ k \ni Z.$

$\sin x = \frac{16}{12}$ $\varnothing$

$\sin x = -\frac{1}{2}$

$x = (-1)^k \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi k,\ k \ni Z.$

Ответ: $x = (-1)^k \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi k,\ k \ni Z.$

Рис. 10.3.

Комментарий: При решении простейшего тригонометрического уравнения $\sin x = -\dfrac{1}{2}$, учащийся допускает ошибку: $\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ считает равным $-\dfrac{\pi}{3}$, а не $-\dfrac{\pi}{6}$. Это делает корни уравнения неверными и приводит к оценке 0 баллов. Кроме этого, решение содержит неуместные условия при замене $\sin x = t$, $t \neq 0$, $t \neq \pi k$, $k \in Z$.

Пример 4.

15. а) $8\sin^2 x + 2\sqrt{3}\cos x + 1 = 0$

$$8\sin^2 x + 2\sqrt{3}\cos x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0$$

$$9\sin^2 x + 2\sqrt{3}\cos x + \cos^2 x = 0$$

$$9(1-\cos^2 x) + 2\sqrt{3}\cos x + \cos^2 x = 0$$

$$9 - 9\cos^2 x + 2\sqrt{3}\cos x + \cos^2 x = 0$$

$$-8\cos^2 x + 2\sqrt{3}\cos x + 9 = 0 \quad /\cdot(-1)$$

$$8\cos^2 x \cancel{+} - 2\sqrt{3}\cos x - 9 = 0$$

$$\underline{\cos x = a}\quad , a \in [-1;1]$$

$$8a^2 - 2\sqrt{3}a - 9 = 0$$

$$D = (-2\sqrt{3})^2 - 4\cdot 8\cdot(-9) = 4\cdot 3 + 288 = 300$$

$$a_1 = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{300}}{16} = \frac{2\sqrt{3}+10\sqrt{3}}{16} = \frac{12\sqrt{3}}{16} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad ; \quad \frac{3\sqrt{3}}{4} \notin [-1;1]$$

$$a_2 = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{300}}{16} = \frac{2\sqrt{3}-10\sqrt{3}}{16} = -\frac{8\sqrt{3}}{16} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos x = a$$

$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z$

$x = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$

б) $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

1. $-\frac{7\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq -2\pi \,/ : \pi$

$-\frac{7}{2} \leq \frac{1}{6} + 2n \leq -2$

$-\frac{22}{6} \leq 2n \leq -\frac{13}{6} \,/ : 2$

$-\frac{22}{12} \leq n \leq -\frac{13}{12}$

т.к. $n \in Z$, то нет корней

2. $-\frac{7\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq -2\pi \,/ : \pi$

$-\frac{7}{2} \leq -\frac{1}{6} + 2n \leq -2$

$-\frac{20}{6} \leq 2n \leq -\frac{11}{6} \,/ : 2$

$-\frac{20}{12} \leq n \leq -\frac{11}{12}$

т.к. $n \in Z$, то $n = -1$.

Если $n = -1$, то $x = -\frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{13\pi}{6}$

Ответ: а) $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$ б) $-\frac{13\pi}{6}$ (см. на обороте)

Рис.10.4.

Комментарии: В решении, приведенном на рисунке 10.4., досадная ситуация: одно лишь неверное преобразование арккосинуса отрицательного аргумента свело весь результат к 0 баллов. Учащийся, видимо, считает, что $\arccos(-a) = \arccos a$ вместо верного $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$. Возможно перенося свойство четности функции $y = \cos x$ на функцию $y = \arccos x$. При этом, обоснованное и безупречное выполнение пункта б) задачи (для найденного неверного решения) не приносит учащемуся 1 балл, т.к. ошибка, о которой идет речь, не является вычислительной.

3. Достаточно много ошибок было связано с незнанием множества значений тригонометрических функций синус и косинус. Учащиеся записывали формулу корней тригонометрических уравнений $\sin x = a$ ***или*** $\cos x = a$ ***не принимая во внимание условие*** $a \in [-1;1]$***, при котором эти уравнения вообще имеют решения.***

Пример 5.

$6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0$, $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

$6(1-\sin^2 x) + 5\sin x - 2 = 0$

$6 - 6\sin^2 x + 5\sin x - 2 = 0$

$-6\sin^2 x + 5\sin x + 4 = 0$

$6\sin^2 x - 5\sin x - 4 = 0$

$\sin x = t$

$6t^2 - 5t - 4 = 0$

$D = (-5)^2 - (-4)\cdot 4\cdot 6 = 121, D > 0$

$t_{1,2} = \frac{5 \pm 11}{12}$

$t_1 = \frac{5+11}{12} = \frac{4}{3}$

$t_2 = \frac{5-11}{12} = -\frac{1}{2}$

$\sin x = \frac{4}{3}$

$x = (-1)^n \arcsin\frac{4}{3} + \pi n, n \in Z$

$x = \pi - \arcsin\frac{4}{3} + 2\pi n, n \in Z$

$-\frac{5\pi}{2} \le -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \le -\pi$

$-\frac{14\pi}{6} \le 2\pi n \le -\frac{5\pi}{6}$

$-\frac{14}{12} \le n \le -\frac{5}{12}$

$-1\frac{2}{12} \le n \le -\frac{5}{12}$

$n = -1$

$-\frac{\pi}{6} + (-2\pi) = -\frac{13\pi}{6}$

$\sin x = -\frac{1}{2}$

$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

$x_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

$-\frac{5\pi}{2} \le -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \le -\pi$

$-\frac{10\pi}{6} \le 2\pi n \le -\frac{\pi}{6}$

$-\frac{10}{12} \le n \le -\frac{1}{12}$

$\varnothing$

Ответ: а) $(-1)^n \arcsin\frac{4}{3} + \pi n, n \in Z$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

$\pi - \arcsin\frac{4}{3} + 2\pi n, n \in Z$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

Рис.10.5.

Комментарии: В работе на рисунке 10.5. учащийся в решение записывает несуществующее значение $\arcsin\frac{4}{3}$, не отмечая, что $\frac{4}{3}\notin[-1;1]$. При отборе корней из промежутка посторонняя серия решений не рассматривается. Для правильного решения обосновано и верно выбраны корни из промежутка. Однако, все это не позволяет эксперту выставить 1 балл, т.к. ошибка в пункте а) не является вычислительной.

***4. К типичным ошибкам при решении задачи 15 можно отнести потерю корней при переходе от решения простейшего тригонометрического уравнения в общем виде к частному виду*.**

Пример 6.

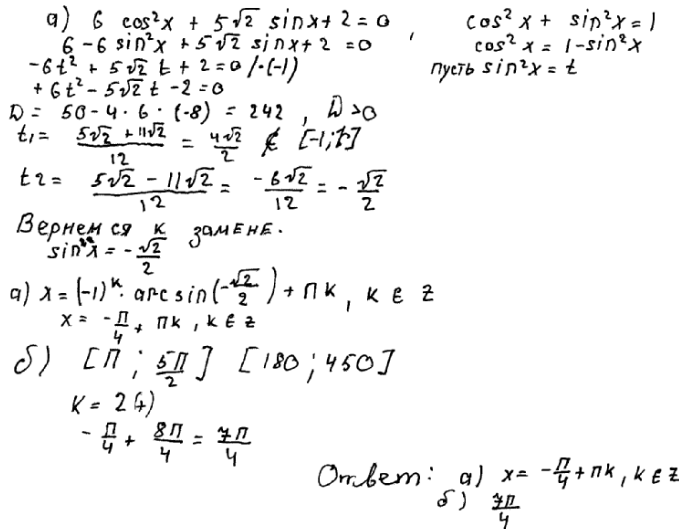

а) $6\cos^2x+5\sqrt{2}\sin x+2=0$, $\cos^2x+\sin^2x=1$
$6-6\sin^2x+5\sqrt{2}\sin x+2=0$, $\cos^2x=1-\sin^2x$
$-6t^2+5\sqrt{2}t+2=0\ /\cdot(-1)$ пусть $\sin^2x=t$
$+6t^2-5\sqrt{2}t-2=0$
$D=50-4\cdot6\cdot(-8)=242$, $D>0$
$t_1=\frac{5\sqrt{2}+11\sqrt{2}}{12}=\frac{4\sqrt{2}}{2}\notin[-1;1]$
$t_2=\frac{5\sqrt{2}-11\sqrt{2}}{12}=-\frac{6\sqrt{2}}{12}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
Вернемся к замене.
$\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
а) $x=(-1)^k\cdot\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k$, $k\in Z$
$x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$
б) $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$ $[180;450]$
$k=2$)
$-\frac{\pi}{4}+\frac{8\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$
Ответ: а) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$
б) $\frac{7\pi}{4}$

Рис. 10.6.

Комментарий: Записав верное решение уравнения $x = (-1)^k \cdot \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k, \quad k \in Z$, упрощая выражение в правой части равенства, учащийся допускает ошибку и записывает $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z$. Последняя формула задает совсем не те значения, которые задает первая формула. В ответ пункта а) записано неверное решение. В пункте б) для неправильной серии решений правильно найдены корни из промежутка, но ошибка в пункте а) не вычислительная, поэтому оценка – 0 баллов.

5. Нарушение логики умозаключений, отсутствие логических связок, рассмотрение одного частного случая верного равенства вместо решения задачи.

Пример 7.

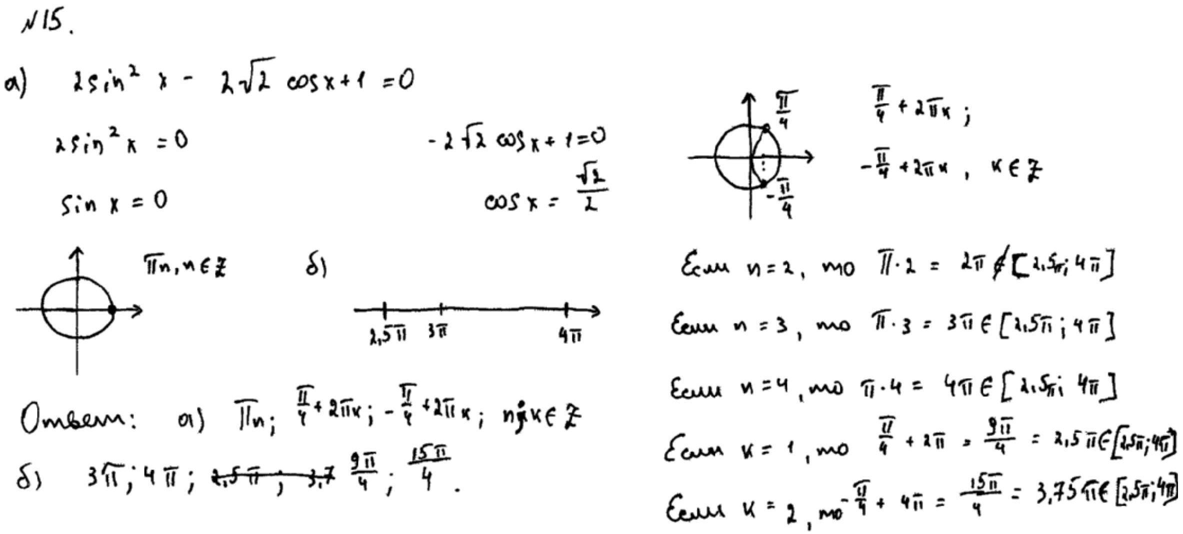


Рис. 10.7.

Комментарий: Среди работ 2015 года ошибка такого рода приобрела популярность. Учащийся сводит глобальное решение уравнения к исследованию одного частного случая. В данном случае, рассматривая равенство суммы нулю только в том случае, когда каждое слагаемое равно нулю. При чем, эти размышления проводятся без логических связок «и» или «или», но по решению очевидно, учащийся имеет в виду связку «или», что делает рассуждение еще более неправильным. Оценка – 0 баллов.

6. Неточности и описки при решении тригонометрического уравнения или отборе корней уравнения из указанного промежутка

Пример 8.

15. а). $6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0$

$6 - \sin^2 x + 5\sin x - 2 = 0$

Пусть $\sin x = t$, $t > 0$

$-t^2 + 5t - 2 + 6 = 0$

$-t^2 + 5t + 4 = 0$

$D = 25 - 4\cdot(-1)\cdot 4 = 25 + 16 = 41$

$t_1 = -\frac{5+\sqrt{41}}{-2} = \frac{5}{2} + \sqrt{41}$ $\qquad$ $t_2 = \frac{5}{2} - \sqrt{41}$

$\sin x = \frac{5}{2} + \sqrt{41}$ $\qquad$ $\sin x = \frac{5}{2} - \sqrt{41}$

$x = (-1)^k + \arcsin \frac{5}{2} + \sqrt{41}$, $k \in Z$ $\qquad$ $x = (-1)^k + \arcsin \frac{5}{2} - \sqrt{41}$, $k \in Z$

Ответ: $(-1)^k + \arcsin \frac{5}{2} + \sqrt{41}$, $k \in Z$; $(-1)^k + \arcsin \frac{5}{2} - \sqrt{41}$, $k \in Z$

Рис. 10.8.

Комментарий: На рисунке 10.8. приведено решение, содержащее изначально ошибку при раскрытии скобок в момент использования основного тригонометрического тождества, что возможно было бы приравнять к описке или вычислительной ошибке. Но, кроме этого, оба простейших тригонометрических уравнения не имеют решения в силу множества значений синуса, на что учащийся не обращает внимания и приводит неверные решения уравнения. Оценка – 0 баллов.

7. Нехарактерная в прошлых годах для задачи такого типа ошибка – неумение работать с иррациональными числовыми выражениями. В связи с этим, для многих учащихся решение квадратного уравнения с иррациональными коэффициентами представляло трудность (чаще всего решение не доводилось до конца).

Пример 9.

15.

$$6\cos^2 x + 5\sqrt{2}\sin x + 2 = 0.$$
$$6(1-\sin^2 x) + 5\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$$
$$6 - 6\sin^2 x + 5\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$$
$$-6\sin^2 x + 5\sqrt{2}\sin x + 8 = 0$$

Замена: $\sin x = t$

$$-6t^2 + 5\sqrt{2}t + 8 = 0$$
$$D = b^2 - 4ac = (5\sqrt{2})^2 - 4\cdot(-6)\cdot 8 = 50 + 192 = 242.$$
$$t_{1/2} = \quad t_1 = \frac{-5\sqrt{2} + \sqrt{242}}{-12}$$
$$t_2 = \frac{-5\sqrt{2} - \sqrt{242}}{-12}$$

Рис.10.9.

Комментарий: В решении на рисунке 10.9. нет ошибок. Но решение не доведено до конца. Упростив полученные иррациональные выражения, учащийся смог бы сделать вывод о решениях уравнения. Оценка – 0 баллов.

8. По-прежнему, как и в прошлых годах, учащиеся теряют баллы в пункте б) решения задачи 15 по причине отсутствия обоснования отбора корней из промежутка. 1 балл за решение пункта б) выставляется при условии присутствия «следов» отбора корней, что зачастую не имело места в работах участников экзамена 2015 года.

Пример 10.

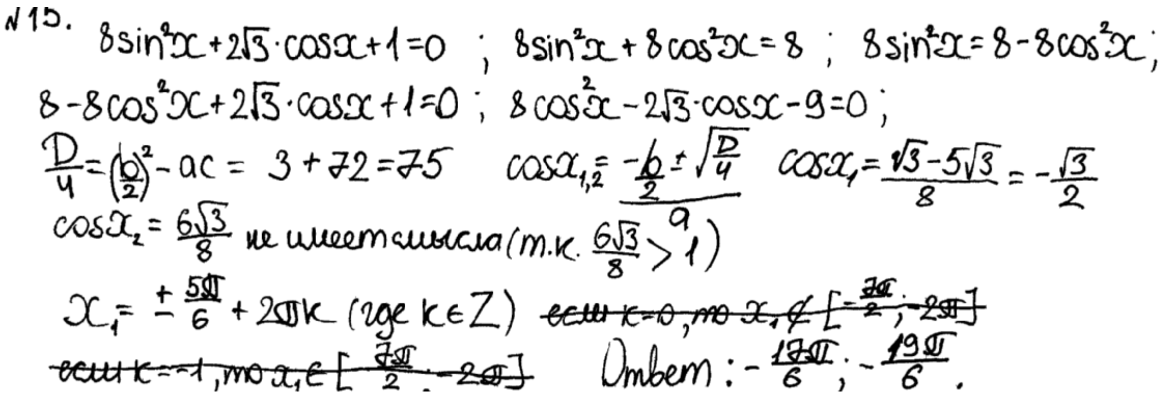

№15. $8\sin^2x+2\sqrt{3}\cdot\cos x+1=0$; $8\sin^2x+8\cos^2x=8$; $8\sin^2x=8-8\cos^2x$;
$8-8\cos^2x+2\sqrt{3}\cdot\cos x+1=0$; $8\cos^2x-2\sqrt{3}\cdot\cos x-9=0$;
$\frac{D}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=3+72=75$ $\cos x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$ $\cos x_1=\frac{\sqrt{3}-5\sqrt{3}}{8}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x_2=\frac{6\sqrt{3}}{8}$ не имеет смысла (т.к. $\frac{6\sqrt{3}}{8}>1$)
$x_1=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k$ (где $k\in Z$) ~~если $k=0$, то $x_1\notin[-\frac{7\pi}{2};-2\pi]$~~
~~если $k=-1$, то $x_1\in[-\frac{7\pi}{2};-2\pi]$~~ Ответ: $-\frac{17\pi}{6}$; $-\frac{19\pi}{6}$.

Рис.10.10.

Комментарий: В решении на рисунке 10.10. приведено верное, достаточно обоснованное решение пункта а). Но «следы» отбора корней из указанного промежутка отсутствуют (хотя в ответе указаны правильно отобранные корни для пункта б)), что дает эксперту право выставить только 1 балл.

Следует отметить, что по сравнению с 2014 годом при решении задачи 15 улучшилась ситуация с обоснованным отбором корней их промежутка. Учащиеся активно использовали различные способы отбора корней: перебор, решая двойное неравенство, используя единичную окружность или график функции. В основном это было успешно.

Задача 16

В 2015 году задача 16 (ранее задача С2) без изменения тематики (Прямые и плоскости в пространстве. Многогранники. Тела и поверхности вращения. Измерение геометрических величин. Координаты и векторы.) стала содержать два пункта с требованиями «доказать» и «найти». Каждый из пунктов независимо оценивался 1 баллом.

Задача 16 предполагала:

– владение как стереометрическими понятиями (такими как пирамида, высота пирамиды, перпендикулярность прямой и плоскости, угол между прямой и плоскостью и др.) так и планиметрическими (в частности, понятием прямоугольного треугольника, определениями тригонометрических функций острого угла прямоугольного треугольника и др.), а также фактами, связанными с этими понятиями;

– умение изображать пирамиду, проводить дополнительные построения, направленные на изображение и поиск угла между прямой и плоскостью;

– знание признаков перпендикулярности прямой и плоскости и умение их использовать при решении задачи;

– знание обратной теоремы Пифагора и умение ею воспользоваться в нужной ситуации;

– владение навыками нахождения угла по значению тригонометрической функции при выполнении вычислительной составляющей решения.

Приведем один из примеров задачи 16:

В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 3$ и $BC = 4$. Длины боковых ребер пирамиды $SA = \sqrt{7}$, $SB = 4$ и $SD = \sqrt{23}$.

а) Докажите, что SA – высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.

Типичные ошибки в решениях задачи 16

1. Самой распространенной ошибкой при решении задачи 16 в 2015 году была неверная трактовка признака перпендикулярности прямой и плоскости: учащиеся (упрощая себе задачу) считали достаточным доказать перпендикулярность рассматриваемой прямой только одной прямой плоскости для того, чтобы утверждать перпендикулярность прямой и плоскости. В то время, как признак гласит «Если прямая перпендикулярна <u>двум</u> пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости». В итоге доказательство в пункте а) было неполным и оценивалось 0 баллов.

Пример 1.

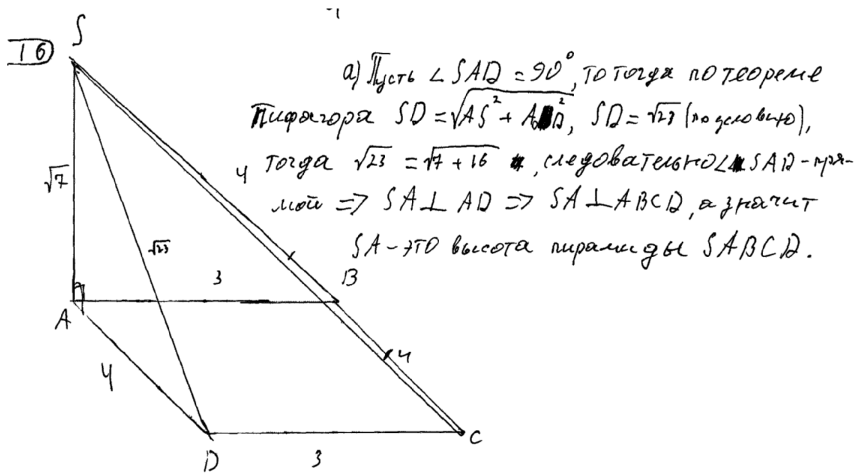


Рис. 11.1.

Комментарии: В решении пункта а) задачи 16 на рисунке 11.1. содержится типовая ошибка, заключающаяся в незнании (или неверном понимании) признака перпендикулярности прямой и плоскости. Рассмотрение одного треугольника и доказательство его прямоугольности с помощью обратной теоремы Пифагора, дает основание утверждать только перпендикулярность прямой SA и AD, чего недостаточно для заключения перпендикулярности прямой SA и плоскости $ABCD$. Решение пункта б) отсутствует. Оценка в таком случае – 0 баллов.

2. Неверное определение искомого угла между прямой и плоскостью (неверный переход к планиметрической задаче) стало также одно из наиболее распространенных типовых ошибок при выполнении пункта б) задачи 16. Процедура определения угла между прямой и плоскостью требует особых рассуждений и дополнительных построений (проекции прямой на плоскость). Однако, многими учащимися искомый угол между прямой и плоскостью был определен интуитивно, без необходимых умозаключений, что, чаще всего, было ошибочным и сводило все решение пункта б) к 0 баллов.

Пример 2.

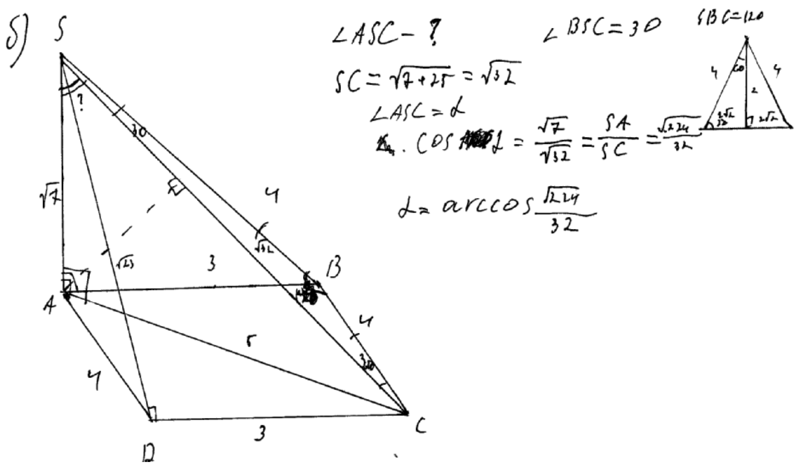


Рис.11.2.

Комментарии: Решение пункта б) задачи 16 на рисунке 11.2. оценено 0 баллов, т.к. искомый угол между прямой *SC* и плоскостью *ASB* определен неверно. Учащимся даже предпринята попытка построения искомого угла по всем правилам – проведен перпендикуляр (видимо, с целью построения проекции прямой на плоскость), но, к сожалению, не из точки *C*, а из точки *A*. Это говорит о том, что у учащегося есть некоторое общее представление об угле между прямой и плоскостью, но недостаточно полное. Часто в решениях пункта б) отсутствовали необходимые дополнительные построения искомого угла, а сам угол просто констатировался (неверно) учащимся без каких-либо пояснений. Все эти случаи сводились к 0 баллов.

3. Распространенным недостатком в решении задачи 16 было отсутствие теоретических ссылок и обоснований логических переходов. Учащиеся не указывают используемую для вывода теорию: определения, теоремы, признаки, свойства и т.д.

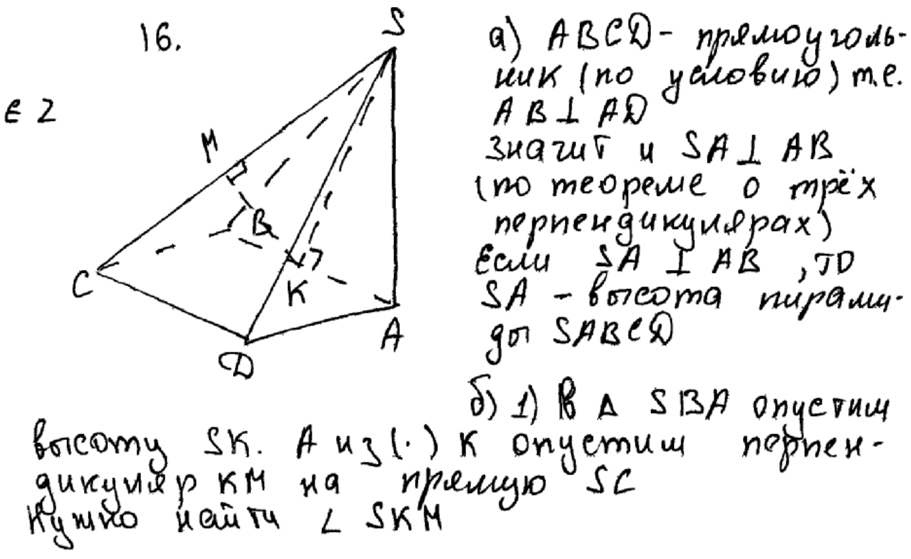
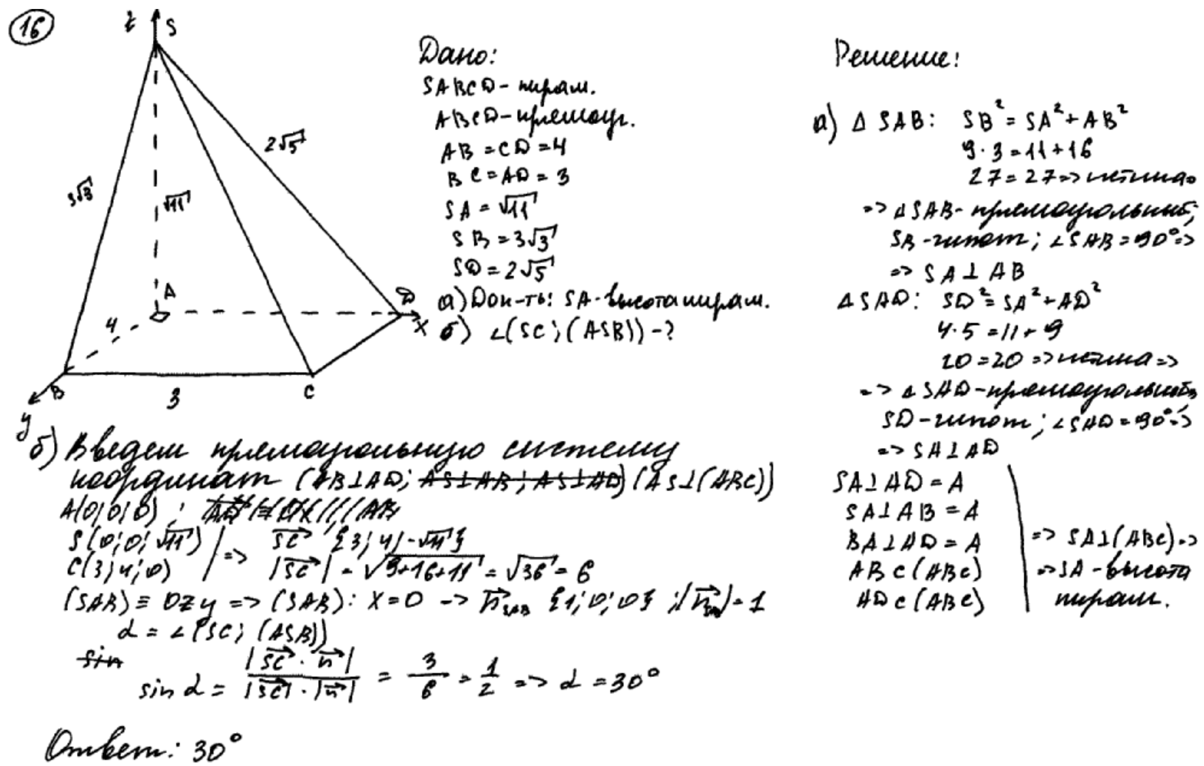


Рис.11.3.

Комментарии: В доказательстве учащимся приводятся некоторые обоснования выводов, в частности, ссылка на теорему о трех перпендикулярах, но основания для этого не приведены. Кроме того, в доказательстве обоснована перпендикулярность рассматриваемой прямой и только одной прямой плоскости, чего недостаточно использования признака перпендикулярности прямой и плоскости. Оба пункта не выполнены, оценка – 0 баллов.

Следует отметить, что по сравнению с 2015 годом при решении задачи 16 улучшилась ситуация с указанием верного ответа. В 2014 году одной из распространенных ошибок было в ответ на требование «Найдите угол между…» выписывание значения одной и тригонометрических функций, используемых в решении, что вело к потере баллов, т.к. решение признавалось незавершенным. В 2015 году таких ошибок практически не было.

Еще одним достоинством решений задачи 16 в 2015 году было активное использование учащимися нестандартных (для школьного курса геометрии) способов решения (в том числе, координатный, координатно-векторный способы). Также можно констатировать увеличение количества работ с оригинальным решением задачи 16. Приведем примеры некоторых из них.


(16)

Дано:
SABCD - пирам.
ABCD - прямоуг.
$AB = CD = 4$
$BC = AD = 3$
$SA = \sqrt{11}$
$SB = 3\sqrt{3}$
$SD = 2\sqrt{5}$
а) Док-ть: SA - высота пирам.
б) $\angle(SC; (ASB))$ - ?

Решение:

а) ΔSAB: $SB^2 = SA^2 + AB^2$
$9 \cdot 3 = 11 + 16$
$27 = 27 \Rightarrow$ истина.
$\Rightarrow \Delta SAB$ - прямоугольный; SB - гипот; $\angle SAB = 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow SA \perp AB$
ΔSAD: $SD^2 = SA^2 + AD^2$
$4 \cdot 5 = 11 + 9$
$20 = 20 \Rightarrow$ истина $\Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta SAD$ - прямоугольный; SD - гипот; $\angle SAD = 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow SA \perp AD$
$SA \perp AD = A$
$SA \perp AB = A$
$BA \perp AD = A$
$AB \subset (ABC)$
$AD \subset (ABC)$
$\Rightarrow SA \perp (ABC) \Rightarrow$
$\Rightarrow SA$ - высота пирам.

б) Введем прямоугольную систему координат ($AB \perp AD$; ~~$AS \perp AB$; $AS \perp AD$~~) ($AS \perp (ABC)$)
$A(0;0;0)$;
$S(0;0;\sqrt{11})$, $C(3;4;0)$ $\Rightarrow \vec{SC}\{3;4;-\sqrt{11}\}$, $|\vec{SC}| = \sqrt{9+16+11} = \sqrt{36} = 6$
$(SAB) \equiv Ozy \Rightarrow (SAB): x = 0 \to \vec{n}_{SAB}\{1;0;0\}$; $|\vec{n}_{SAB}| = 1$
$\alpha = \angle(SC; (ASB))$

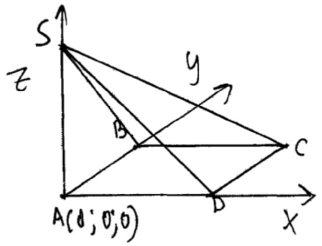
$$\sin\alpha = \frac{|\vec{SC} \cdot \vec{n}|}{|\vec{SC}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$$

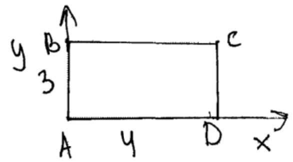
Ответ: 30°

Рис. 11.4.

Комментарии: В решении на рисунке 11.4. угол найден с помощью координатного метода. Грамотно введен вектор $\vec{n}$. Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б). Оценка – 2 балла.

№ 16





Решение

Дано:

SABCD – пирамида

$AB = 3$

$BC = 4$

$SA = \sqrt{7}$

$SB = 4$

$SD = \sqrt{23}$

а) ~~SA~~ Доказать, что SA – высота пирамиды

б) $\angle(SC; ASB)$ – ?

а) Предположим, что SA действительно высота данной пирамиды. Тогда $\triangle SAB$ и $\triangle SAD$ – прямоугольные. Если они являются таковыми, то воспользовавшись теоремой Пифагора, мы получим верное равенство.

Итак, в $\triangle SAB$ по теореме Пифагора: $SB^2 = SA^2 + AB^2$; $16 = 7 + 9$ – это верное равенство, означает, что перед нами действительно прямоугольный треугольник.

Аналогично, рассмотрим $\triangle SAD$: $SD^2 = SA^2 + AD^2$; $23 = 7 + 16$ – это верное равенство, означает, что перед нами действительно прямоугольный треугольник $\Rightarrow$ $SA \perp AB$ и $SA \perp AD$, а значит, перпендикулярна плоскости основания ($SA \perp$ пл. $ABCD$) $\Rightarrow$ SA – высота пирамиды SABCD, что и требовалось доказать.

б) Введём систему координат XYZ. За начало координат возьмём т. A. Тогда точки имеют следующие координаты: $C(4; 3; 0)$, $S(0; 0; \sqrt{7})$, $A(0,0,0)$, $B(0,3,0)$.

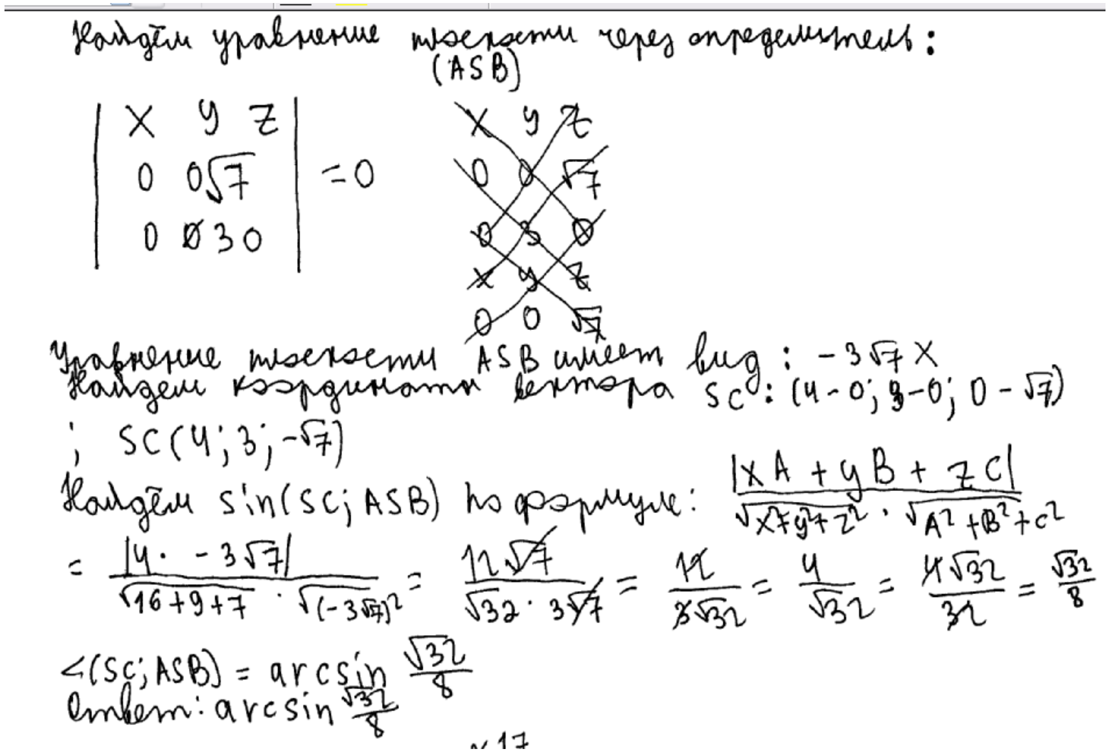
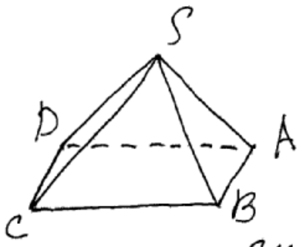


Рис.11.5.

Комментарии: Решение на рисунке 11.5. достаточно грамотное. Для нахождения уравнения плоскости по трем точкам учащийся демонстрирует умение работать с определителем, несвойственное школьному курсу математики. Хотя ответ не преобразован, не приведен к эталонному 450, он является правильным. Оценка – 2 балла.



Дано: SABCD - пирамида

ABCD - прямоугольник

$AB=3 \quad BC=4 \quad SA=\sqrt{7} \quad SD=\sqrt{23} \quad SB=4$

а) SA - высота

б) $\widehat{SC\ ASB}$

см. на обороте

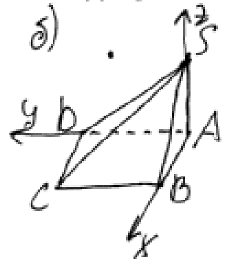
а) По теореме косинусов найдем $\angle SAB$ и $\angle SAD$

$\cos\angle SAB = \frac{7+9-16}{2\cdot\sqrt{7}\cdot 3} = 0 \Rightarrow \angle SAB = 90^\circ$

$\cos\angle SAD = \frac{7+16-23}{2\cdot\sqrt{7}\cdot 4} = 0 \Rightarrow \angle SAD = 90^\circ$

т.к. $\angle SAD = \angle SAB = 90^\circ$, $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA$ - высота

б)



$A(0;0;0) \quad S(0;0;\sqrt{7})$

$C(3;4;0) \quad B(3;0;0)$

$\overline{SC}(3;4;-\sqrt{7})$

$\alpha = (ASB) = Ax+By+Cz+D$

$\begin{cases} D=0 \\ \sqrt{7}C+D=0 \\ 3A+D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} A=0 \\ C=0 \\ D=0 \end{matrix}$

$\alpha = y \qquad A=0 \quad B=1 \quad C=0 \quad D=0$

$n(0;1;0)$

$\sin \widehat{\overline{SC}\,(ASB)} = \left|\frac{\overline{SC}\cdot\overline{n}}{|\overline{SC}|\cdot|\overline{n}|}\right| = \frac{4}{\sqrt{9+16+7}\cdot\sqrt{1}} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\widehat{\overline{SC}\,(ASB)} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$

Рис. 11.6.

Комментарии: К оригинальным решениям можно отнести доказательство перпендикулярности прямой и плоскости с помощью теоремы косинусов, представленное на рисунке 11.6. Угол между прямой и плоскостью найден также нестандартным для школьного курса математики методом координат. Все рассуждения достаточно обоснованные и верные. Оценка – 2 балла.

Задача 17

В профильном ЕГЭ 2015 года модель задачи 17 (ранее – задача С3) претерпела изменения по сравнению с прошлым годом. Вместо системы неравенств была предложена задача: решить «одиночное» неравенство.

Задача 17 предполагала:

- умение использовать метод введения вспомогательной переменной для решения неравенств;
- умение применять метод интервалов;
- владение тождественными преобразованиями рациональных выражений, а также показательных и логарифмических выражений и умения оценить равносильность этих преобразований;
- владение понятием области допустимых значений неравенства, системы неравенств, совокупности неравенств, в данном случае связанной со свойствами дробно-рациональной функции;
- знание свойств показательной и логарифмической функций;
- понимание смысла системы неравенств как логической операции «конъюнкции» и совокупности неравенств как логической операции «дизъюнкция» и др.

Приведем один из примеров задачи 17 из варианта 579:

«Решите неравенство: $\frac{2}{8^x-10} \geq \frac{4}{8^x-8}$».

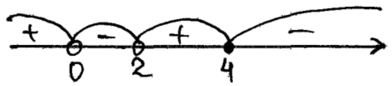
Участниками ЕГЭ 2015 года были предложены несколько различных способов решения, в том числе отличные от предложенных разработчиками. Основные: метод интервалов с предварительной заменой и так называемый логический, предполагавший рассмотрение случаев неотрицательности дроби (частного).

Ниже на рисунках 12.1 и 12.2 приведены примеры работ учащихся с безошибочными решениями задачи №17 описанными способами.

Пример 1.

17. $\frac{2}{8^x-10} \geq \frac{4}{8^x-8}$; Пусть $t = \cancel{(x)}\ 8^x-8$, тогда $\frac{2}{t-2} \geq \frac{4}{t}$;

$\frac{2t-4\cdot(t-2)}{t(t-2)} \geq 0$; $\frac{-2t+8}{t(t-2)} \geq 0$, отсюда имеем $t \neq 0$ и $t \neq 2$, и $t = 4$. Найдем такие

t, при которых выполняется неравенство , $t \in (-\infty; 0) \cup (2; 4]$.

Обратная замена

$8^x - 8 < 0$ и $2 < 8^x - 8 \leq 4$

$8^x < 8$ $\quad$ $10 < 8^x \leq 12$

$x < 1$. $\quad$ $\log_8 10 < x \leq \log_8 12$

Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup (\log_8 10; \log_8 12]$.

Рис. 12.1

Пример 2.

17. $\frac{2}{3^x-9} \geq \frac{8}{3^x-3}$

$\frac{2}{3^x-9} - \frac{8}{3^x-3} \geq 0$

$\frac{2(3^x-3)-8(3^x-9)}{(3^x-9)(3^x-3)} \geq 0$

Рассмотрим 2 случая:

I $\begin{cases} 2(3^x-3)-8(3^x-9) \geq 0 \ (1) \\ (3^x-9)(3^x-3) > 0 \ (2) \end{cases}$ или II $\begin{cases} 2(3^x-3)-8(3^x-9) \leq 0 \ (4) \\ (3^x-9)(3^x-3) < 0 \ (5) \end{cases}$

Решим I систему:

1) $2(3^x-3)-8(3^x-9) \geq 0$

$2\cdot 3^x - 6 - 8\cdot 3^x + 72 \geq 0$

$-6\cdot 3^x+66\geq 0$

$-6\cdot 3^x\geq -66$

$3^x\leq 11$

$\log_3 3^x\leq \log_3 11$

$x\leq \log_3 11$

2) $(3^x-9)(3^x-3)>0$

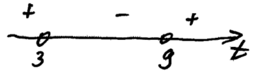
$3^{2x}-9\cdot 3^x+27-3\cdot 3^x>0$

$3^{2x}-12\cdot 3^x+27>0$

Пусть $3^x=t$

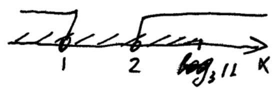
$t^2-12t+27>0$

$(t-9)(t-3)>0$



$\left[\begin{array}{l} t>9 \\ t<3 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} 3^x>9 \\ 3^x<3 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<1 \end{array}\right.$

3) $\begin{cases} x\leq \log_3 11 \\ \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<1 \end{array}\right. \end{cases}$



Учтём, что: $2<\log_3 11<3$

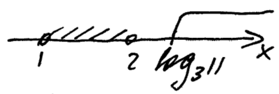
$\left[\begin{array}{l} x<1 \\ 2<x\leq \log_3 11 \end{array}\right.$

Решим систему II исходя из решения системы I:

4) $x\geq \log_3 11$

5) $1<x<2$

6) $\begin{cases} x\geq \log_3 11 \\ 1<x<2 \end{cases}$



Система II не имеет решения.

Ответ: $(-\infty;1);(2;\log_3 11]$

Рис. 12.2

Комментарии: Решение, согласно критериям, оценено максимальным баллом, не смотря на нерациональное решение неравенства (2).

Типичные ошибки в решениях задачи 17

1. Самые распространённые ошибки, сделанных учащимися, приступившими к решению задачи №17 в 2015 году, связаны с формальным перенесением методов и приёмов решения уравнений на неравенства того же типа. Это в частности проявилось в умножение неравенства на выражение с переменной без учёта знака этого выражения и в применении к неравенству свойства пропорции. Следующие примеры иллюстрируют указанные ошибки.

Пример 3.

17. $\dfrac{2}{8^x-10} \geq \dfrac{4}{8^x-8}$

домножаем каждую дробь

$2(8^x-8) \geq 4(8^x-10)$

$2\cdot 8^x-16 \geq 4\cdot 8^x-40$

$2\cdot 8^x-16-4\cdot 8^x+40 \geq 0$

$8^x-10 \neq 0$

$8^x \neq 10$

$8^x \neq \log_8 10$

$8^x-8 \neq 0$

$8^x \neq 8$

$8^x \neq \log_8 8$

$8^x \neq 1$

$8^x = t$

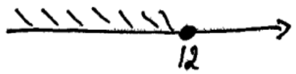
$2t - 16 - 4t + 40 \geq 0$

$-2t + 24 \geq 0$

$-2t \geq -24$

$2t \leq 24$

$t \leq 12$



$(-\infty; 12].$

$0 \leq 8^x \leq 12$

$0 \leq 8^x \leq \log_8 12$

Ответ: $[0; \log_8 12]$.

Рис. 12.3

Комментарии: Автором этого решения, представленного на рис. 12.3 применено неравносильное преобразование, а именно: умножение неравенства на выражение с переменной, знак которого зависит от значения этой переменной. Согласно критериям, оценка – 0 баллов. Заметим также, что в последнем переходе, видимо, ученик допустил описку, вместо x записав 8^x. Учитывая эту погрешность, можно констатировать, что автор этого решения не знает также, что неравенство $8^x \geq 0$ верно при всех значениях переменной. Заметим, что последнее замечание, к сожалению, не редко встречалось и в других работах.

Пример 4.

17) $\frac{2}{8^x-10} \ge \frac{4}{8^x-8}$

Пусть $8^x = y$, $\frac{2}{y-10} \ge \frac{4}{y-8}$

$4y-40 \ge 2y-16$

$2y \ge 24$

$y \ge 12$

$8^x \ge 12$ $x \in [2;+\infty)$

Ответ: $[2;+\infty)$

Рис. 12.4

Комментарии: Автор этого решения неправомерно применил для неравенства свойство пропорции («крест-накрест»), что проиллюстрировал соответствующим знаком. Имеется также ошибка вычислительного характера в последнем переходе решения. Оценка, согласно критериям, 0 баллов.

2. ***Также очень распространённой ошибкой надо считать переход от дробно-рационального неравенства к неравенству, связывающему числители («отбрасывание» знаменателя). В следующем примере представлена именно такая ошибка.***

Пример 5.

№17. $\frac{2}{3^x-9}\ {}^{\backslash 3x-3} \ge \frac{8}{3^x-3}\ {}^{\backslash 3x-9}$

$\frac{2(3^x-3)-8(3^x-9)}{(3^x-3^2)(3^x-3)} \ge 0$

~~функция~~ $\frac{2(3^x-3)-8(3^x-9)}{(3^x-3^2)(3^x-3)}$ ~~убывает~~ ~~возрастает~~ ~~на всей~~ ~~области~~ ~~определения~~.

ОДЗ

$3^x-3^2 \ne 0$ $x \ne 2$

$3^x-3 \ne 0$ $x \ne 1$

$$\frac{2(3^x-3)-8(3^x-9)}{(3^x-3^2)(3^x-3)} \geqslant 0$$

$$(3^x-3)-\cancel{8}^{\,4}(3^x-9) \geqslant 0$$

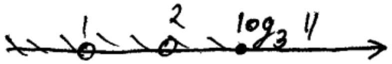
$$3^x-3 \geqslant 4\cdot 3^x-36$$

$$33 \geqslant 4\cdot 3^x-3^x$$

$$33 \geqslant \cancel{4}3\cdot 3^x$$

$$11 \geqslant 3^x$$

$$\log_3 11 \geqslant x$$



Ответ: $x \ni \cancel{(-\infty}\ (-\infty;1)\cup(2;\log_3 11]$

Рис. 12.5.

Комментарии: нарушена равносильность в определённый момент решения. Можно предположить, что ученик использовал в общем случае неверное утверждение о том, что «дробь неотрицательна при неотрицательном числителе». Согласно критериям, 0 баллов.

Заметим также, что в этой работе наблюдается ещё одна достаточно распространённая ошибка: аналитическое и графическое представления ответа не соответствуют друг другу, описывая различные числовые множества. Если бы эта ошибка была единственной, то, согласно критериям, решение могло претендовать на 1 балл.

3. Ряд учащихся вместо неравенства решали уравнение. Соответствующий пример ниже.

Пример 6.

$$17.\ \frac{2}{8^x-10} \geq \frac{4}{8^x-8}$$

$$\frac{2}{8^x-10} = \frac{4}{8^x-8}$$

$$2(8^x-8) = 4(8^x-10)$$

$$2\cdot 8^x-16 = 4\cdot 8^x-40$$

$$2\cdot 8^x-4\cdot 8^x = -40+16$$

$$2\cdot 8^x = 24$$

$$8^x = \frac{24}{2}$$

$$8^x = 12$$

Рис. 12.6.

Комментарии: Учащийся решал задачу, отличную от сформулированной в КИМ. Согласно критериям, 0 баллов.

4. Как уже отмечалось выше, учащиеся, приступившие к решению задачи №17 и получившие ненулевой балл за эту задачу, применяли в основном метод интервалов, предварительно введя вспомогательную переменную.

С применением метода интервалов и введением вспомогательной переменной связан ряд достаточно распространённых ошибок. Отдельные из них, согласно критериям, могут расцениваться как вычислительные (ошибка при определении знаков на промежутках, неверное расположение чисел на числовой прямой), другие – принципиальные, связанные с пропуском шагов алгоритма или неверным их выполнением, не могут быть оценены ненулевым баллом. Приведём примеры.

Пример 7.

№17. $\dfrac{3}{6^x-6} \geqslant \dfrac{4}{6^x-5}$

ОДЗ: $\begin{cases} 6^x-6\neq 0 \\ 6^x-5\neq 0 \end{cases}; \begin{cases} 6^x\neq 6 \\ 6^x\neq 5 \end{cases}; \begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq \log_6 5 \end{cases}$

$$\frac{3}{6^x-6}^{\backslash 6^x-5} - \frac{4}{6^x-5}^{\backslash 6^x-6} \geqslant 0$$

$$\frac{3(6^x-5)-4(6^x-6)}{(6^x-6)(6^x-5)} \geqslant 0$$

Пусть $6^x = t$, тогда

$$\frac{3(t-5)-4(t-6)}{(t-6)(t-5)} \geqslant 0$$

$$\frac{3t-15-4t+24}{t^2-5t-6t+30} \geqslant 0$$

$$\frac{-t+9}{t^2-11t+30} \geqslant 0$$

$f(x) = \dfrac{-t+9}{t^2-11t+30}$

$D(f)$: $t^2-11t+30\neq 0$

$D=121-120\neq 1$

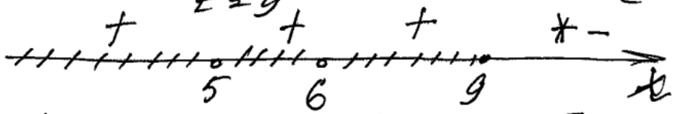
$t_1\neq \dfrac{11+1}{2} = \dfrac{12}{2}\neq 6$

$t_2\neq \dfrac{11-1}{2} = \dfrac{10}{2}\neq 5$

Н.ф: $-t+9=0$

$-t=-9$

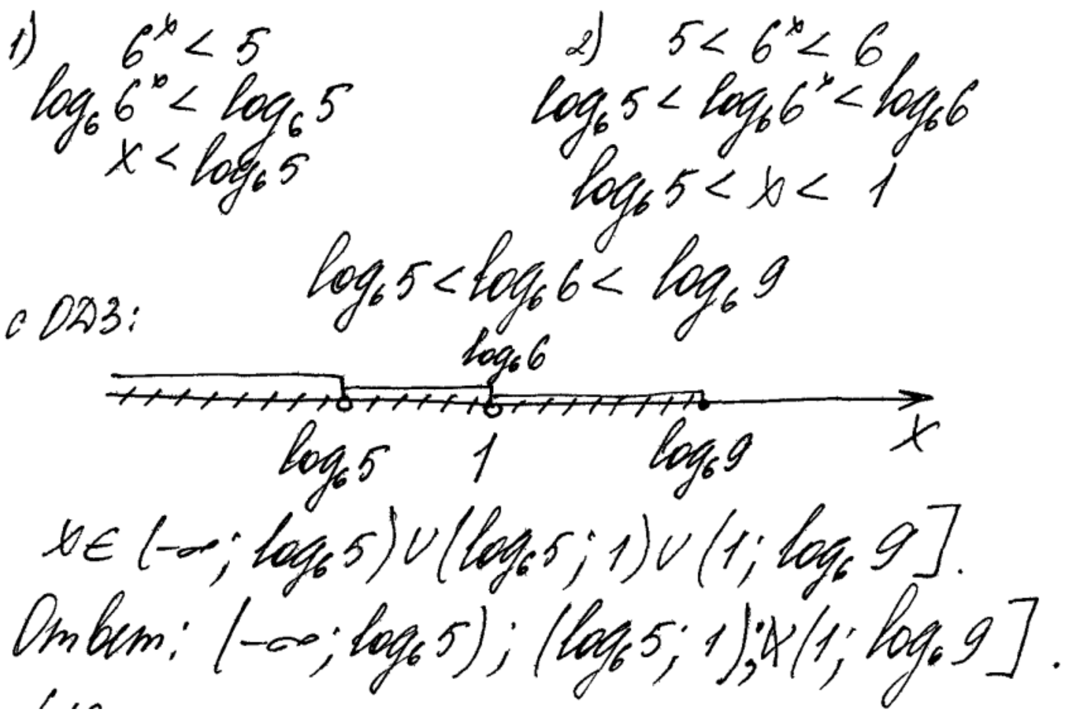
$t=9$



$t\in(-\infty;5)\cup(5;6)\cup(6;9]$.

$$\left[\begin{array}{l} t<5 \\ 5<t<6 \\ 6<t\leqslant 9 \end{array}\right.$$

(см. на др. стороне).



1) $6^x < 5$

$\log_6 6^x < \log_6 5$

$x < \log_6 5$

2) $5 < 6^x < 6$

$\log_6 5 < \log_6 6^x < \log_6 6$

$\log_6 5 < x < 1$

3) $6 < 6^x \le 9$

$\log_6 6 < \log_6 6^x \le \log_6 9$

$1 < x \le \log_6 9$

$\log_6 5 < \log_6 6 < \log_6 9$

с ОДЗ:

$x \in (-\infty; \log_6 5) \cup (\log_6 5; 1) \cup (1; \log_6 9]$.

Ответ: $(-\infty; \log_6 5)$; $(\log_6 5; 1)$; $\cup (1; \log_6 9]$.

Рис.12.7.

Комментарии: Ошибка в определении знака на одном из интервалов вполне может быть признана вычислительной. Учащийся довёл решение до конца, продемонстрировав в целом владение методом замены переменных и методом интервалов. Согласно критериям, 1 балл.

Пример 8.

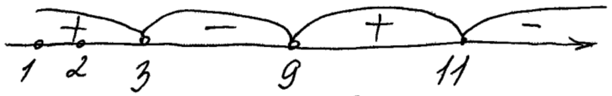
17. $\frac{2}{3^x-9} \geqslant \frac{8}{3^x-3}$ ОДЗ: $3^x-9\neq0$, $3^x\neq3^2$, $x\neq2$; $3^x-3\neq0$, $3^x\neq3^1$, $x\neq1$

$3^x=t$

$\frac{2}{t-9}-\frac{8}{t-3}\geqslant0$,

$\frac{2(t-3)-8(t-9)}{(t-9)(t-3)}\geqslant0$, $\frac{2t-6-8t+72}{(t-9)(t-3)}\geqslant0$,

$\frac{-6t+66}{(t-9)(t-3)}\geqslant0$, $\frac{-6(t-11)}{(t-9)(t-3)}\geqslant0$,



$t\in(-\infty;3)\cup[9;11]$

При ОДЗ: $x\in(-\infty;2)\cup(2;3)\cup(1;2)\cup(9;11]$

Ответ: $(-\infty;1),(1;2),(2;3),(9,11]$

Рис. 12.8.

Комментарии: Не сделана обратная замена – необходимый шаг алгоритма. На числовой прямой отмечены значения исходной и введённой переменной. Согласно критериям, 0 баллов.

Отдельные учащиеся применили так называемый логический способ решения, осуществив на определённом этапе равносильный переход к совокупности двух систем. Пример правильного решения этим способом представлен на рисунке 12.2. С этим способом решения неравенства связаны следующие ошибки. Это рассмотрение только одного случая положительности (отрицательности) дроби, неверное использование логической символики. Приведём примеры.

Пример 9.

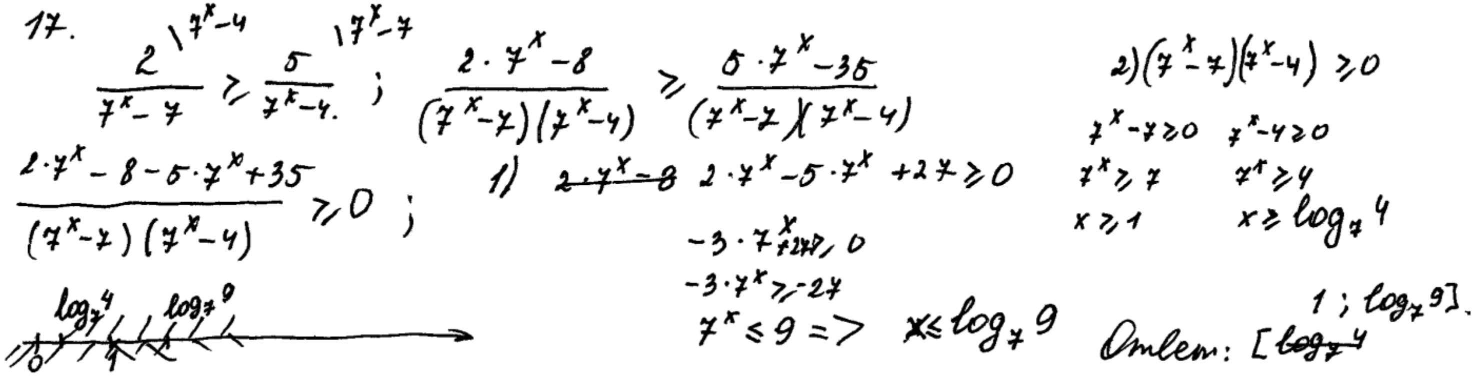
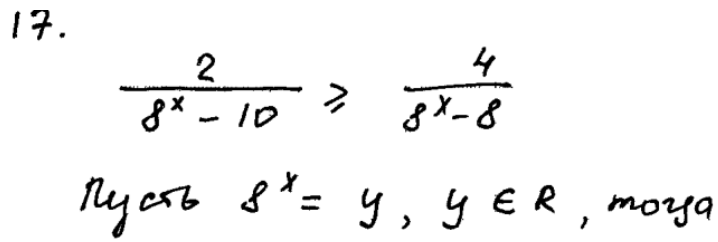


Рис. 12.9.

Комментарии: В решении рассмотрен только один случай неотрицательности дроби. При решении неравенства (2) автор решения делает ещё одну ошибку логического характера, рассматривает только один случай неотрицательности произведения. Согласно критериям, 0 баллов.

Пример 10.



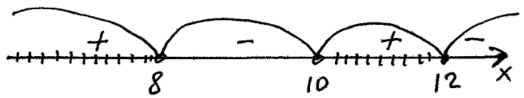
$$\frac{2}{y-10} - \frac{4}{y-8} \geq 0$$

$$\frac{2}{y-10}^{\backslash y-8} - \frac{4}{y-8}^{\backslash y-10} = 0$$

$$\frac{2y-16-4y+40}{(y-10)(y-8)} = 0$$

$$\frac{-2y+24}{(y-10)(y-8)} = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} -2y+24=0 \\ (y-10)(y-8)\neq 0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} y=12 \\ y\neq 10 \text{ или } y\neq 8 \end{array}\right.$$



$$\left\{\begin{array}{l} y<8 \\ 10<y\leq 12 \end{array}\right.$$

Обратная замена:

$$\left\{\begin{array}{l} 8^x<8 \\ 10<8^x\leq 12 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x<1 \\ \log_8 10<x\leq \log_8 12 \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\begin{array}{l} x<1 \\ \log_8 10<x\leq \log_8 12 \end{array}\right.$

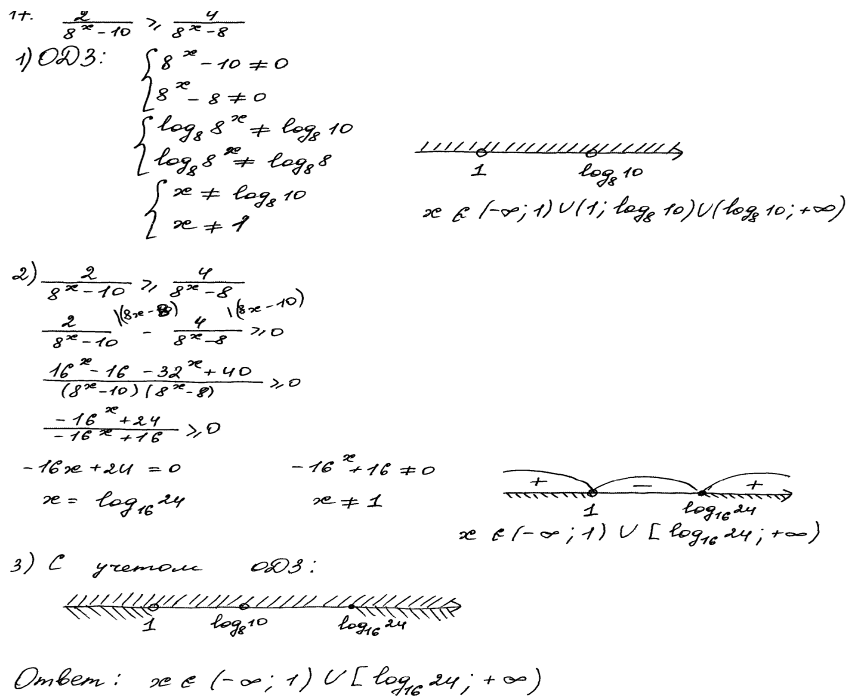
Рис. 12.10.

Комментарии: в представленном выше решении автор многократно неверно использует логическую символику. В явном виде логические операции «конъюнкция» и «дизъюнкция» в школьном курсе математики не изучаются, не изучаются также законы формальной логики. В связи с этим, а также в связи с тем, что имеется верная последовательность всех шагов решения, работа оценена ненулевым баллом, однако, этот балл не максимальный.

5. Необходимым условием решения неравенств повышенной трудности является устойчивые умения тождественных преобразований выражений, в данном случае дробно-рациональных, показательных и логарифмических. Ошибки этого типа, к сожалению, являются распространенными.

Приведём пример работы с одной из очень распространённых ошибок такого типа.

Пример 11.


1+. $\frac{2}{8^x-10} \geq \frac{4}{8^x-8}$

1) ОДЗ: $\begin{cases} 8^x-10 \neq 0 \\ 8^x-8 \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_8 8^x \neq \log_8 10 \\ \log_8 8^x \neq \log_8 8 \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq \log_8 10 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$x \in (-\infty; 1) \cup (1; \log_8 10) \cup (\log_8 10; +\infty)$

2) $\frac{2}{8^x-10} \geq \frac{4}{8^x-8}$

$\frac{2}{8^x-10}^{\backslash (8^x-8)} - \frac{4}{8^x-8}^{\backslash (8^x-10)} \geq 0$

$\frac{16^x-16-32^x+40}{(8^x-10)(8^x-8)} \geq 0$

$\frac{-16^x+24}{-16^x+16} \geq 0$

$-16x+24=0$ $\quad$ $-16^x+16 \neq 0$

$x = \log_{16} 24$ $\quad$ $x \neq 1$

$x \in (-\infty; 1) \cup [\log_{16} 24; +\infty)$

3) С учетом ОДЗ:

Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup [\log_{16} 24; +\infty)$

Рис. 12.11.

Комментарии: автор решения дважды ошибся при выполнении умножения числа на степень. Согласно критериям, 0 баллов.

Задача 18

В профильном ЕГЭ 2015 года модель задачи 18 (ранее – задача С4) не претерпела никаких изменений по сравнению с прошлым годом. Это планиметрическая задача, состоящая из двух пунктов: пункт на доказательство геометрического факта и пункт на нахождение одного из компонентов рассматриваемой конфигурации.

Задача №18 предполагала:

- владение понятиями вписанного многоугольника (треугольника. четырёхугольника), вписанного и центрального углов, подобия треугольников;
- знание геометрических фактов, в частности, таких как признаки подобия треугольников; расположение центра окружности, описанной около треугольника; условие вписанного в окружность четырёхугольника; теорема Пифагора и др.;
- умение проводить доказательство геометрических утверждений.

Приведём пример задачи № 18 и пример одного из возможных решений, предложенного участником ЕГЭ 2015 года:

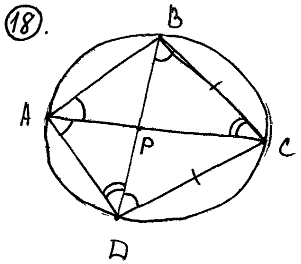
«Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P, причём $BC = CD$.

а) Докажите, что $AB : BC = AP : PD$.

б) Найдите площадь треугольника COD, где O - центр окружности, вписанной в треугольник ABD, если дополнительно известно, что $BD = 3, BC = 3\sqrt{2}$ ».

Пример 1.

18.

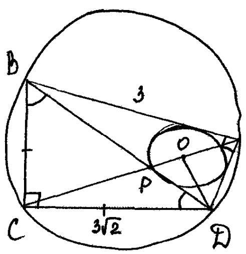


Дано: ABCD – 4-х уг.
ABCD впис. в окр.
$AC \cap BD = P$
$BC = CD$
а) Д-ть: $AB : BC = AP : PD$
б) Найти: S_{COD} – ?, если окр. (O, r) впис. в $\triangle ABD$
BD – диаметр опис. окр.
$AB = 3$; $BC = 3\sqrt{2}$

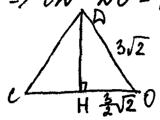
Решение:

а) $BC = CD \Rightarrow \triangle BCD$ – р/б $\Rightarrow \angle DBC = \angle BDC$
$\angle DBC$ и $\angle DAC$ – впис. и опир. на $\cup DC \Rightarrow \angle DAC = \angle DBC$
$\angle BDC$ и $\angle BAC$ – впис. и опир. на $\cup BC \Rightarrow \angle BDC = \angle BAC$
$\angle ADB$ и $\angle ACB$ – впис. и опир. на $\cup AB \Rightarrow \angle ADB = \angle ACB$
$\Rightarrow \triangle APD \sim \triangle ABC$ (по I приз.):
$\Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{PD}{BC} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AP}{PD}$ (ч.т.

б)



$\angle BAC = \angle DAC$ (по док.) $\Rightarrow AC$ – биссектр. $\angle BAD$; окр $(O; r)$ – впис. в $\triangle ABD$ $\Big| \Rightarrow O \in AC \Rightarrow$
$\Rightarrow OD$ – биссектр. $\angle BDA$.
BD – диаметр опис. около ABCD окр.; $\angle BCD$ опир. на BD $\Big| \Rightarrow \angle BCD = 90^\circ$; $BC = CD$ $\Big| \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle BCD$ – прямоуг.; р/б $\Rightarrow \angle CBD = \angle BDC = 45^\circ$
ABCD – впис. $\Rightarrow \angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$; $\angle C = 90^\circ$ (по док.) $\Big| \Rightarrow \angle BAD = 90^\circ$
$\triangle BCD\ (\angle C = 90^\circ)$: $BD^2 = BC^2 + CD^2 \Rightarrow BD = \sqrt{36} = 6$
$\triangle ABD\ (\angle A = 90^\circ)$: $AB = 3$; $BD = 6$ $\Big| \Rightarrow \angle BDA = 30^\circ$; OD – биссектр. $\angle BDA$ $\Big| \Rightarrow \angle BDO = \angle ODA = 15^\circ$
AO – биссектр. $\angle BAD \Rightarrow \angle OAD = 45^\circ$; $\angle ODA = 15^\circ$ $\Big| \Rightarrow \triangle ODA$: $\angle DOA = 180^\circ - \angle ODA - \angle OAD = 120^\circ$; $\angle POD$ и $\angle DOA$ – смежн. $\Rightarrow \angle POD + \angle DOA = 180^\circ$ $\Big| \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle POD = 60^\circ$
$\angle CDO = \angle CDP + \angle PDO$; $\angle CDP = 45^\circ$; $\angle PDO = 15^\circ$ $\Big| \Rightarrow \angle CDO = 60^\circ$ $\Big| \Rightarrow \triangle COD$: $\angle CDO = 60^\circ$; $\angle COD = 60^\circ$ $\Big| \Rightarrow \angle OCD = 60^\circ \Rightarrow \triangle COD$ – р/с; $BC = CD = 3\sqrt{2}$
$\Rightarrow CD = DO = OC = 3\sqrt{2}$.



Дп: DH – высота $\triangle CDO$; $\triangle CDO$ – р/с $\Rightarrow DH$ – медиана $\Rightarrow HO = \frac{1}{2} CO = \frac{3}{2}\sqrt{2}$
$\triangle DHO\ (\angle H = 90^\circ)$: $DH = \sqrt{DO^2 - HO^2} = \sqrt{18 - \frac{9}{2}} = 3\sqrt{1\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$
$S_{\triangle CDO} = \frac{1}{2} \cdot DH \cdot CO = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{6}}{2} \cdot 3\sqrt{2} = \frac{9}{4} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.
Ответ: $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ ед

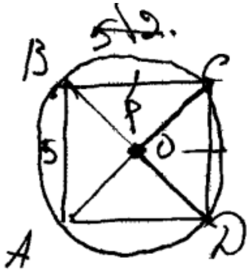
Рис. 13.1.

Типичные ошибки в решениях задачи №18

1. Массовая ошибка, наличие которой отметили все эксперты, заключалась в том, что многие участники ЕГЭ, приступившие к решению задачи № 18, из условия вписанности четырёхугольника в окружность и равенства двух его смежных сторон делали ошибочный вывод о том, что этот четырёхугольник квадрат либо ромб.

Пример 2.

18.)



Дано: P – центр. окруж.; ~~от~~

ABCD – вписанной квадрат.

BC = CD

Док-ть, что: а) AB : BC = AP : PD

Найти: б) S_{COD}.

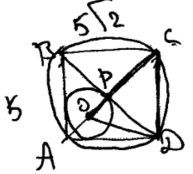
т.к $ABCD$ - квадрат и $BC=CD$ по услов. $\Rightarrow$ $(AOD; DOB; BOC)$,

$AOB = BOC = COD = DOA$; $ABC = ACD$; $\Rightarrow$ $(AB)'$ - равнобедр.

т.к $ABCD$ - квадр. $\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle AOD \Rightarrow \triangle ABC$ и $\triangle AOD$ - подобные;

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AP}{PD}$

б)



$AC = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + 5^2} = \sqrt{25 \cdot 2 + 25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

$PC = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$; $OP = AO = PC \cdot \dfrac{1}{2}$; $\Rightarrow$

$OP = AO = \dfrac{10\sqrt{3}}{2} \quad \dfrac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow OC = \dfrac{5\sqrt{3}}{4} + \dfrac{5\sqrt{3}}{2} = \dfrac{5\sqrt{3} + 10\sqrt{3}}{4} = \dfrac{5\sqrt{3}}{4}$

Рассмотрим $\triangle PCD$;

$PD = \sqrt{CD^2 - PD^2} = \sqrt{5^2 - \left(\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{5^2 - \dfrac{25 \cdot 3}{4}} = \sqrt{25 - \dfrac{75}{4}} = \sqrt{\dfrac{100-75}{4}}$

$= \sqrt{\dfrac{25}{4}} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$

Рассмотрим $\triangle PDO$:

$PD = 2{,}5$; $OP = \dfrac{5\sqrt{3}}{4}$

$OD = \sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{25}{4} + \dfrac{25 \cdot 3}{16}} = \sqrt{\dfrac{100+75}{16}} = \dfrac{\sqrt{175}}{\sqrt{16}} = \dfrac{\sqrt{175}}{4}$

$S_{BCD} = S_{PCD} + S_{PDO}$;

Рис. 13.2.

Комментарии: Уже при оформлении краткой записи задачи в рубрике «дано» автор этого решения указывает ошибочное условие, утверждая, что $ABCD$ - вписанный квадрат. Этот факт использован в данном решении как основной. Все остальные ошибки этого решения – следствия необоснованного допущения. Фактически рассматривается задача, отличная от сформулированной в КИМ, или частный случай этой задачи. Согласно критериям, оценка 0 баллов.

Пример 3.

18. а) Дано: $ABCD$ вписан в Окр. (O)

$BC = CD$

Доказать: $AB : BC = AP : PD$

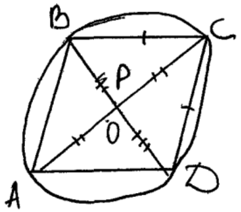
1) $ABCD$ - ромб (т.к. $BC = CD$) - по определению

$AB = AD$

2) $AO = OC$; $BP = PD$ (как половины диагоналей)

3) $AB \neq BC$, $AP \neq PD$

$\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{PD}$ ■



Комментарий: ошибочный вывод из условия о том, что $ABCD$ - ромб. Налицо незнание определения ромба. Кроме того решение содержит противоречащие друг другу записи. Согласно критериям, оценка 0 баллов.

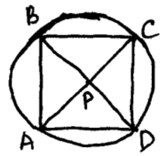
2. Неполнота решения – также один распространенных недостатков решений задачи № 18 (С4). В решениях часто присутствовало либо только попытка доказательства геометрического факта, либо только попытка вычисления площади.

При неполном решении, учащимися чаще отдавалось предпочтение задаче на доказательство, нежели задаче на вычисление.

Пример 4.

18.

а)



Дано:
ABCD – четырехугольник
AC пересек. BD в т. P
окружность.
$BC = CD$

Доказать:
$AB : BC = AP : PD$

Доказательство:
По условию $BC = CD$, значит
ABCD – квадрат, у квадрата
все сторона равна, получается $AB = BC$, и диагонали
равна $AC = BD$, тогда AP и PD являются радиусами
окружности, а радиусы в окружности равны $\Rightarrow$
что $\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{PD}$

Рис. 13.4.

Комментарий: Присутствует только попытка доказательства пункта а), причём всё с той же типичной ошибкой-заблуждением. Оценка, согласно критериям оценивания, 0 баллов.

Задача 19

В ЕГЭ 2015 года задача 19 абсолютно новая. Это задание высокого уровня сложности с экономическим содержанием, проверяющее практические навыки применения математики в повседневной жизни, навыки построения и исследования математических моделей.

Задача 19 предполагала:

– умение работать с процентами, частями, долями;
– владение понятием «математическая модель»;
– умение строить математическую модель задачи;
– умение применять математические методы для решения содержательных задач из различных областей науки и практики;
– умение интерпретировать полученный результат, учитывать реальные ограничения;
– владение вычислительными навыками.

Приведем один из примеров задачи 19:

«В июле планируется взять кредит в банке на сумму 3 млн. рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наименьший годовой платеж составит 0,24 млн. рублей».

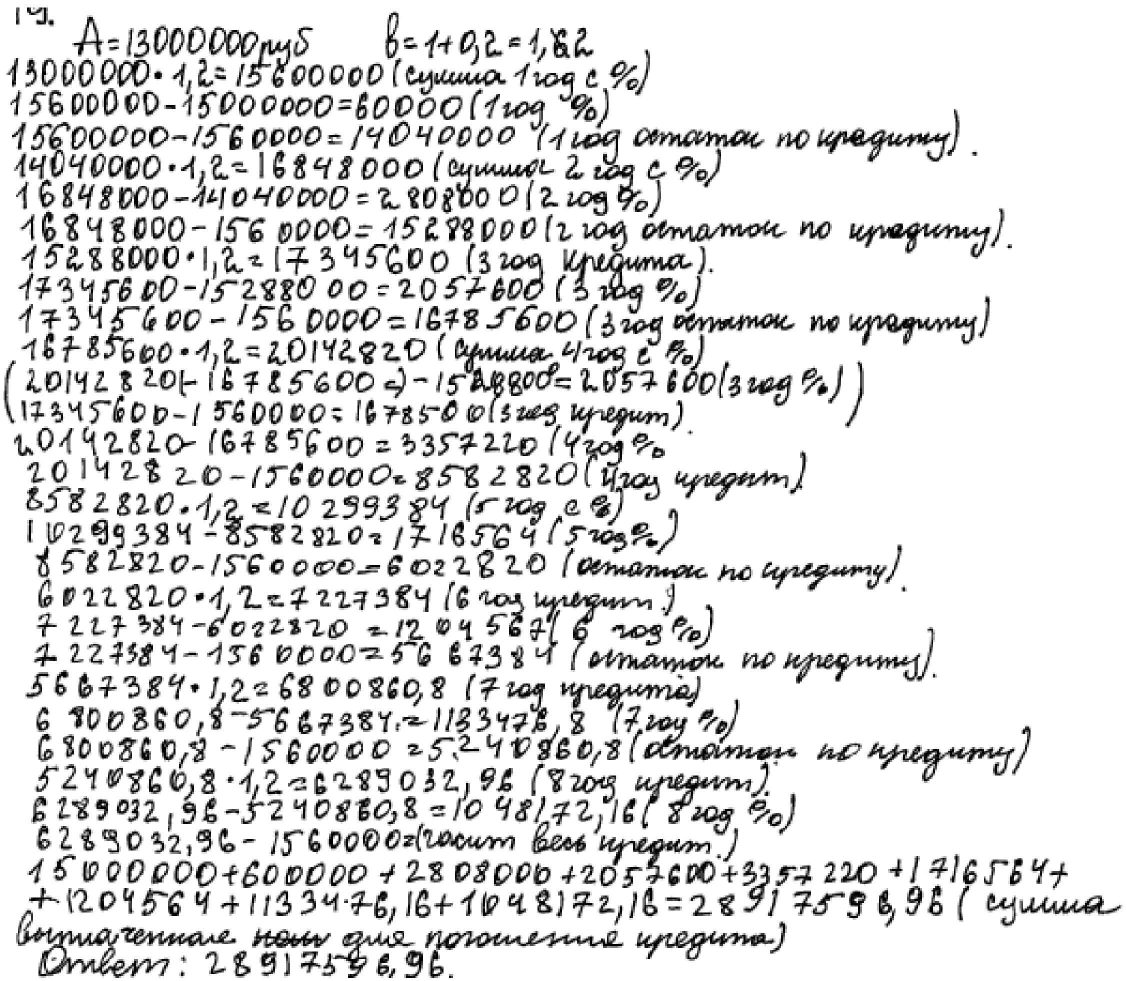
.

Типичные ошибки в решениях задачи 19

1. Самой распространенной ошибкой при решении задачи 19 в 2015 году было неверное понимание условия задачи. Большая часть учащихся, приступивших к выполнению задачи 19, трактовала условие «в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года» как «в июле каждого года

долг должен быть на одну и ту же сумму меньше», т.е. как «платеж был одинаковым». Изменив условие задачи, учащиеся решали другую задачу, что оценивалось 0 баллов.

Пример 1.

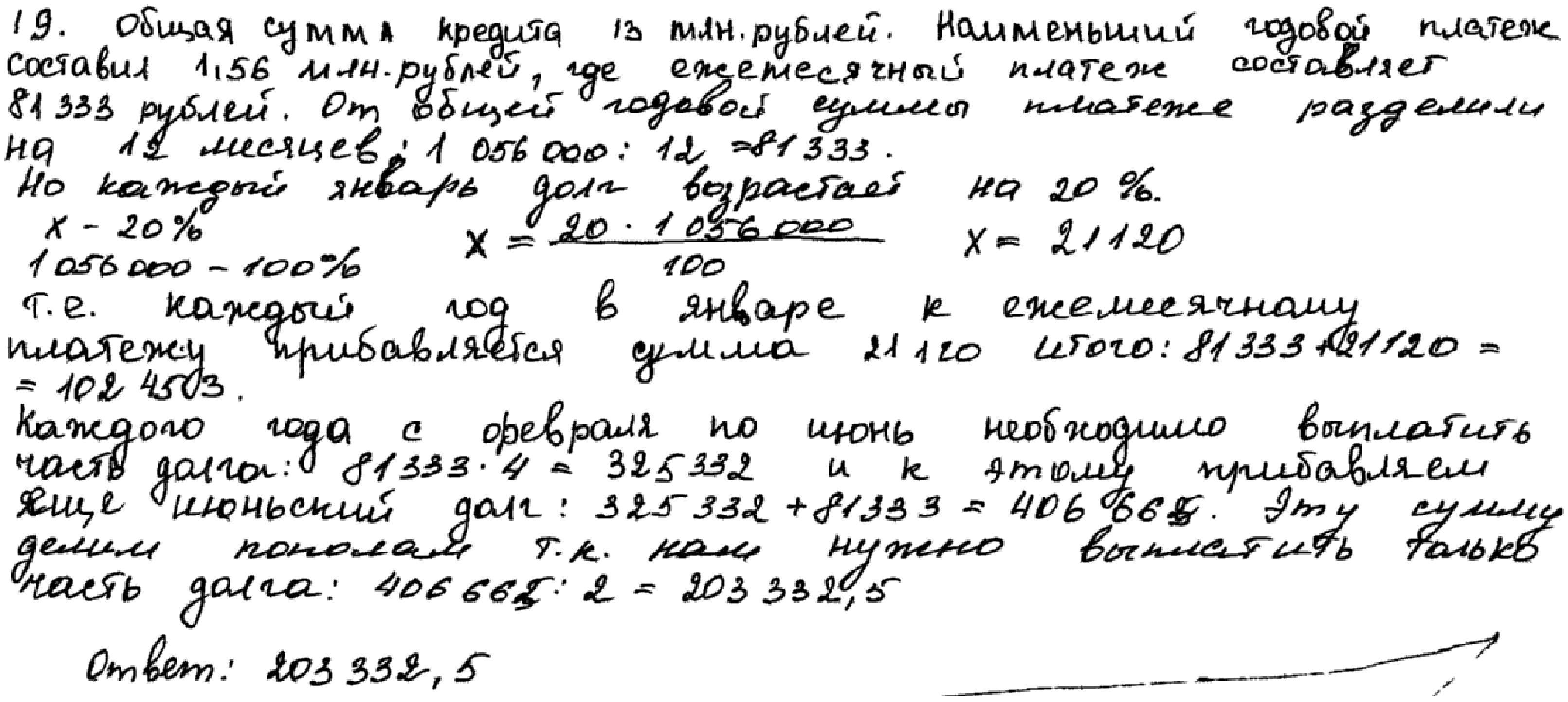


14.
A=13000000руб b=1+0,2=1,2
13000000·1,2=15600000 (сумма 1год с %)
15600000-15000000=600000 (1год %)
15600000-1560000=14040000 (1год остаток по кредиту).
14040000·1,2=16848000 (сумма 2 год с %)
16848000-14040000=2808000 (2 год %)
16848000-1560000=15288000 (2 год остаток по кредиту).
15288000·1,2=17345600 (3 год кредита).
17345600-15288000=2057600 (3 год %)
17345600-1560000=16785600 (3год остаток по кредиту)
16785600·1,2=20142820 (сумма 4год с %)
(20142820-16785600=)-15288000=2057600 (3 год %))
(17345600-1560000=16785600 (3 год кредит)
20142820-16785600=3357220 (4год %
20142820-1560000=8582820 (4год кредит)
8582820·1,2=10299384 (5 год с %)
10299384-8582820=1716564 (5год %)
8582820-1560000=6022820 (остаток по кредиту).
6022820·1,2=7227384 (6 год кредит.)
7227384-6022820=1204564 (6 год %)
7227384-1560000=5667384 (остаток по кредиту).
5667384·1,2=6800860,8 (7 год кредита)
6800860,8-5667384=1133476,8 (7 год %)
6800860,8-1560000=5240860,8 (остаток по кредиту)
5240860,8·1,2=6289032,96 (8 год кредит).
6289032,96-5240860,8=1048172,16 (8 год %)
6289032,96-1560000 (гасит весь кредит.)
15000000+600000+2808000+2057600+3357220+1716564+
+1204564+1133476,16+1048172,16=28917596,96 (сумма
вытраченные ~~нам~~ для погашения кредита)
Ответ: 28917596,96.

Рис.14.1.

Комментарии: В решении на рисунке 14.1. выплата по кредиту считается учащимся постоянной – 1,56 млн. рублей, что не соответствует условию задачи. Оценка – 0 баллов.

Пример 2.



19. Общая сумма кредита 13 млн. рублей. Наименьший годовой платеж составил 1,56 млн. рублей, где ежемесячный платеж составляет 81 333 рублей. От общей годовой суммы платеже разделили на 12 месяцев: 1 056 000 : 12 = 81 333.

Но каждый январь долг возрастает на 20 %.

x – 20%

1 056 000 – 100%

$x = \frac{20 \cdot 1\,056\,000}{100}$ $x = 21120$

т.е. каждый год в январе к ежемесячному платежу прибавляется сумма 21 120 итого: 81333 + 21120 = = 102 453.

Каждого года с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга: 81333 · 4 = 325 332 и к этому прибавляем еще июньский долг: 325 332 + 81333 = 406 665. Эту сумму делим пополам т.к. нам нужно выплатить только часть долга: 406 665 : 2 = 203 332,5

Ответ: 203 332,5

Рис.14.2.

Комментарии: Рассуждения учащегося в решении на рисунке 14.2. далеки от реального условия задачи. Оценка – 0 баллов.

Следует отметить, что некоторые работы все-таки отличались оригинальным решением задачи 19. Приведем примеры таких работ.

Пример 3.

19. I. Если наименьший годовой платеж составил 3.85 млн руб., то в июль последнего года (потому что наименьший годовой платеж должен быть именно в последний год) сумма ~~в банке~~ задолженности составляла 3.5 млн руб. (3.85 − 10%).

II. Если в июль последнего года задолженность в банке была 3.5 млн, а в июль первого года — 14 млн руб, значит, кредит взят на 4 года, и на июль каждого года задолженность уменьшалась на 3.5 млн:

июль первого года = 14 млн
июль второго года = 10.5 млн
июль третьего года = 7 млн
июль четвертого года = 3.5 млн

III. Зная сумму задолженности на июль каждого года и учитывая факт того, что каждый январь банк начислял 10%, найдем ежегодные платежи за каждый год:

1) $14 \cdot 1.1 - x_1 = 10.5$
$x_1 = 15.4 - 10.5 = 4.9$ млн

2) $10.5 \cdot 1.1 - x_2 = 7$
$x_2 = 11.55 - 7 = 4.55$ млн

3) $7 \cdot 1.1 - x_3 = 3.5$
$x_3 = 7.7 - 3.5 = 4.2$ млн

4) $3.5 \cdot 1.1 - x_4 = 0$
$x_4 = 3.85$ млн (что соответствует условию)

IV. Суммируем все ежегодные платежи:

$4.9 + 4.55 + 4.2 + 3.85 = 17.5$

Ответ: 17.5 млн рублей.

Рис.14.3.

Комментарии: В решении на рисунке 14.3. логически связанные, обоснованные верные рассуждения. Размышления ведутся «с конца задачи». Решение сопровождается правильными вычислениями. Оценка – 3 балла.

Пример 4.

№19.)

Предположим что платеж в 0,24 млн рублей был последним, тогда =>

1) 0,24 − 0,24 = 0, долг погашен => на янв. этого года долг состовлял 0,24, что яв. 120%, от долга на июнь. предид. года.

2) 0,2 − июль предид. года.

3) Δ (дельта) состовляет = 0,2, тогда получаем, что кредит был взят на 15 лет.

Сост. табл.

год	Июль	Янв	Фев.
1	3,0	3,6	3,6 − 0,8
2	2,8	3,36	3,36 − 0,76
3	2,6	3,12	3,12 − 0,72
4	2,4	2,88	2,88 − 0,68
5	2,2	2,64	2,64 − 0,64
6	2,0	2,4	2,4 − 0,6
7	1,8	2,16	2,16 − 0,56
8	1,6	1,92	1,92 − 0,52
9	1,4	1,68	1,68 − 0,48
10	1,2	1,44	1,44 − 0,44
11	1,0	1,2	1,2 − 0,4
12	0,8	0,96	0,96 − 0,36
13	0,6	0,72	0,72 − 0,32
14	0,4	0,48	0,48 − 0,28
15	0,2	0,24	0,24 − 0,24

4) Сложив все выплаты получаем

$S_K = 7{,}8$ млн. р.

Ответ: $S_K = 7.8$ млн. р.

Рис.14.4.

Комментарии: Решение на рисунке 14.4. учащийся оформляет в виде таблицы, предоставляющей всю необходимую информацию. Рассуждения и вычисления верные, но недостаточно обоснованные, поэтому оценка – 2 балла.

Задача 20

В профильном ЕГЭ 2015 года модель задачи №20 (ранее – задача С5) принципиально не изменилась. Уже традиционно это задача с параметром. На этот раз – система уравнений, одно из которых содержит параметр. Это задача высокого уровня сложности.

Задача №20 предполагала:

- Наличие обобщенных знаний о различных типах уравнений, их совокупностях и системах;
- Владение на высоком уровне понятиями функционально-графической линии курсов алгебры, алгебры и начал анализа и соответствующими умениями;
- Владение понятием параметра, модуля действительного числа, уравнения с параметром, системы уравнений;
- Умение использовать графическую интерпретацию аналитических данных задачи;
- Понимание смысла уравнения с параметром как множества уравнений или множества однотипных линий (с некоторыми исключениями) в прямоугольной системе координат;
- Умение выделять случаи при раскрытии модуля и правильно «раскрывать» модуль;
- Умение проводить перебор и анализ всевозможных ситуаций, удовлетворяющих вопросу задачи (в данном случае - ситуаций взаимного расположения графиков уравнений системы);
- Умение выделять «особые» значения параметра;
- Умение использовать частные особенности задачи для рационализации решения и др.

Приведём один из примеров задачи №20: «Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} |x^2-2x|-x^2=|y^2-2y|-y^2, \\ x+y=a, \end{cases}$ имеет более двух решений».

Приведем одно из возможных решений задачи 20, предложенное участником ЕГЭ 2015 года.

Пример 1.

20. $\begin{cases} |x^2-2x|-x^2=|y^2-2y|-y^2 \\ x+y=a \end{cases}$

1) $|x^2-2x|-x^2=|y^2-2y|-y^2$: $\xrightarrow[0 \quad 2]{+ \quad - \quad +} x$ (под модулем)

1сл: $\left[\begin{array}{l} x<0 \\ x\geq 2 \end{array}\right.$

$x^2-2x-x^2=|y^2-2y|-y^2$;

$-2x=|y^2-2y|-y^2$, $\xrightarrow[0 \quad 2]{+ \quad - \quad +} y$ (под модулем)

а) $\left[\begin{array}{l} y<0 \\ y\geq 2 \end{array}\right. \Rightarrow -2x=y^2-2y-y^2$;

$-2x=-2y$

$\underline{y=x}$

б) $0\leq y<2 \Rightarrow -2x=-y^2+2y-y^2$;

$-2x=-2y^2+2y$,

$\underline{x=y^2-y}$

2сл: $0\leq x<2$

а) $\left[\begin{array}{l} y<0 \\ y\geq 2 \end{array}\right.$

$-2x^2+2x=y^2-2y-y^2$,

$\underline{y=x^2-x}$

б) $0\leq y<2$

$-2x^2+2x=-2y^2-2y$,

$x^2-x=y^2-y$.

$(x-y)(x+y)=(x-y)$

$x\neq y$ $\qquad$ $x=y$.

$x+y=1$

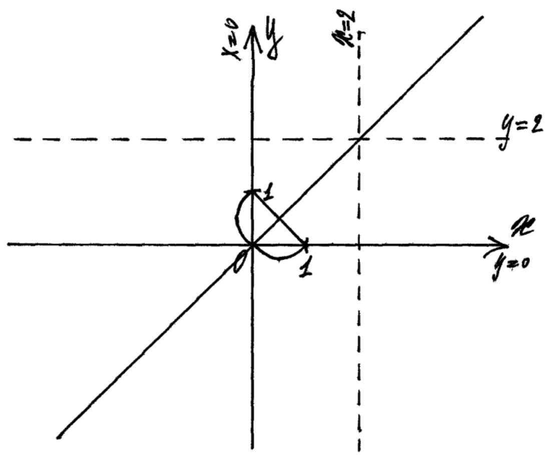
$\underline{y=-x+1}$ $\xrightarrow{\text{см.}}$

Продолжение к 20:

2) $x+y=a$

$y=-x+a$

график – прямая, полученная параллельным переносом по оси Oy на $|a|$ единиц вверх, если $a>0$ или вниз, если $a<0$. из графика функции $y=-x$ (при $a=0$.)



На рисунке представлен график ~~второго~~ первого уравнения, из него видно, что при $a<0$ система имеет ровно 1 решение; при $a=0$ тоже одно решение, при $0<a<1$ система имеет 3 решения, при $a=1$ система имеет бесконечно много решений, при $a>1$ система имеет 1 решение. Значит, более двух решений система имеет только при $0<a\leq 1$.

Ответ: при $a \in (0; 1]$.

Рис. 15.1.

Комментарий: Участником ЕГЭ предложен графический способ решения. Верный ответ получен обоснованно с помощью верного рассуждения. Согласно критериям оценивания, 4 балла.

Типичные ошибки в решениях задачи 20

1.Одна из типичных ошибок - неверное раскрытие модуля. Приведём пример.

Пример 2.

20. $\begin{cases} |x^2-2x|-x^2=|y^2-2y|-y^2 \\ x+y=a \end{cases}$

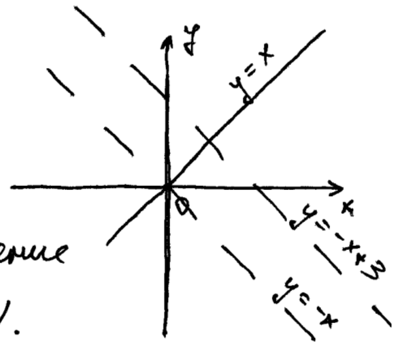
Ответ: б) $\angle CSB = 6$ -30

Рассмотрим 4 ситуации раскрытия модулей в 1 ур.:

1) $x>0;\ y>0$: $x^2-2x-x^2=y^2-2y-y^2$

$-2x=-2y$

$\begin{cases} y=x \\ x+y=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ y=-x+a \end{cases}$



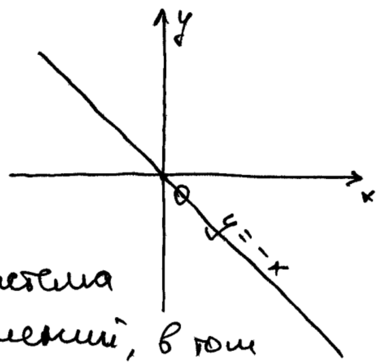
Параметр a влияет лишь на смещение линейной ф-ции $y=-x$ по оси OY.

Как мы видим по графику, при любых значениях a система имеет лишь 1 решение.

2) $x>0;\ y<0$: $x^2-2x-x^2=y^2+2y-y^2$

$-2x=2y$

$\begin{cases} y=-x \\ y=-x+a \end{cases}$



В этом случае лишь при $a=0$ система имеет бесконечное множество решений, в том числе и больше двух решений.

3) $x<0;\ y>0:\quad x^2+2x-x^2=y^2-2y-y^2$

$$2x=-2y$$

$$\begin{cases} y=-x \\ y=-x+a \end{cases}$$

Аналогично с второй ситуацией, решение есть при $a=0$.

4) $x<0;\ y<0:\quad x^2+2x-x^2=y^2+2y-y^2$

$$2x=2y$$

$$\begin{cases} y=x \\ y=-x+a \end{cases}$$

Аналогично с первой ситуацией, при любых a у системы будет лишь одно решение.

Ответ: при $a=0$

Рис.15.2.

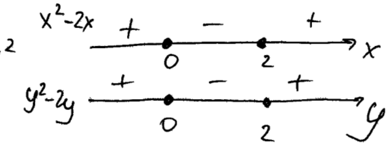
Комментарий: В решении неверно определены точки смены знака подмодульных выражений. Если считать описанную особенность решения опиской, то раскрываются модули также вопреки определению. Согласно критериям, 0 баллов.

2. Ещё одна достаточно распространённая ошибка состоит в рассмотрении не всех возможных случаев раскрытия модулей.

Пример 3.

20. $\begin{cases} |x^2-2x|-x^2=|y^2-2y|-y^2 \\ x+y=a \end{cases}$

$|x^2-2x|-x^2=|y^2-2y|-y^2$



I $\begin{cases} x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty) \\ y\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty) \\ x^2-2x-x^2=y^2-2y-y^2 \end{cases}$

$-2x=-2y$

$x=y$

II $\begin{cases} x\in[0;2] \\ y\in[0;2] \\ 2x-x^2-x^2=2y-y^2-y^2 \end{cases}$

$-2x^2+2x=-2y^2+2y \quad |:(-2)$

$x^2-x=y^2-y$

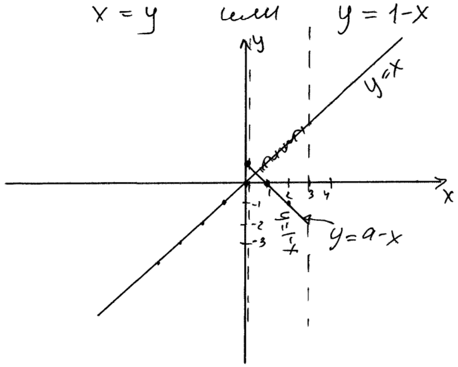
$x^2-y^2=x-y$

$(x-y)(x+y)-(x-y)=0$

$(x-y)(x+y-1)=0$

$\Downarrow$

$x=y$ или $y=1-x$



при $a=1$.

$\Downarrow$

$x\in[0;2]$. $\Rightarrow R$ (бесконечно много решений)

$a=1$.

Ответ: $\begin{cases} x\in[0;2] \\ a=1. \end{cases}$

Рис. 15.3.

Комментарий: Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения дуг парабол и прямых (аналитически или графически), однако, не рассмотрены ещё два случая раскрытия модуля. Согласно критериям, 1 балл.

3. Задача №20 не является исключением ещё одной распространённой ошибки при оформлении учащимися решения задач с развёрнутым ответом. Это наличие записей, которые в некоторых случаях необходимо расценивать как фактическую ошибку.

4. Достаточно много участников ЕГЭ 2015 года, приступивших к решению задачи 20, подобрали или получили одно значение параметра, при котором система уравнений имеет два или более решений, непосредственной проверкой подтвердили это. В 2014 году, если исходное уравнение было решено для выделенного каким-либо образом значения параметра и показано наличие необходимого количества решений, при отсутствии или ошибочности других рассуждений решение, согласно прошлогодним критериям, оценивалось одним баллом. В 2015 году такой возможности критерии не допускали. Подобные решения в 2015 году оценивались 0 баллов. Приведём пример.

Пример 4.

20. $\begin{cases} \text{I. } |x^2-2x|-x^2=|y^2-2y|-y^2 \\ \text{II. } x+y=a. \end{cases}$

Преобразуем I ур-е.

1) $x^2-2x-x^2=y^2-2y-y^2$ при $|x^2-2x|>0$; $|y^2-2y|>0$.

$-2x-2y=0 \Leftrightarrow 2x+2y=0.$

2) $-x^2+2x-x^2=-y^2+2y-y^2$ при $|x^2-2x|<0$; $|y^2-2y|<0$

$-x^2+y^2=y-x \Leftrightarrow y^2-x^2=y-x$

Тогда:

$$\begin{cases} 2x+2y=0 \\ y^2-x^2=y-x \\ x+y=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y)=0 \\ (y-x)(y+x)=y-x \\ x+y=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=0 \\ y+x=1 \\ x+y=a. \end{cases} \Leftarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

Ответ: $a=0$
$a=1.$

Комментарий: При описании условия случая автором решения использована запись, являющаяся ошибочным утверждением. Согласно общим методическим рекомендациям разработчиков, 0 баллов. Заметим также, что в результате решения получено одно верное значение параметра, однако, даже при отсутствии фактической ошибки в решении, согласно критериям 2015 года, оно не могло бы претендовать на ненулевой балл.

Задача 21

В профильном ЕГЭ 2015 года задач 21 (ранее – задача С6) традиционно высокого уровня сложности.

На этот раз задача 21 предполагала наличие как обобщенных, так и некоторых частных умений в области математики, а также наличия опыта решения нестандартных задач. Перечислим некоторые из предполагавшихся знаний и умений:

– умение строить и исследовать простейшие математические модели;
– умение различать логическую структуру утверждений с квантором существования и с квантором общности, знание способов доказательства истинности и ложности утверждений с различными кванторами; знание так называемых кванторных законов и умение переформулировать утверждение с помощью этих законов, сохраняя его смысл;
– владение понятием натурального числа;
– наличие представления о числовых множествах, отличных от множества натуральных чисел;
– знание геометрических фактов, таких как условие существования треугольника, теоремы Пифагора и др.

Приведем один из примеров задачи 21 и вариант её решения, предложенный разработчиками:

«Три числа назовём *хорошей* тройкой, если они могут быть длинами сторон треугольника.

Три числа назовём *отличной* тройкой, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольник.

а) Даны 8 различных натуральных чисел. Может ли оказаться, что среди них не найдётся ни одной хорошей тройки?

б) Даны 4 различных натуральных числа. Может ли оказаться, что среди них можно найти три отличных тройки?

в) Даны 12 различных чисел (не обязательно натуральных). Какое наибольшее количество отличных троек могло оказаться среди них?».

а) Если числа равны 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 и 128, то никакие три из них не образуют хорошую тройку.

б) Если одно из чисел является длиной гипотенузы для двух треугольников, то какое-то из оставшихся трёх чисел является длиной катета для этих двух треугольников, а тогда треугольники окажутся равными по гипотенузе и катету. Значит, каждое число может быть длиной гипотенузы не более чем одного треугольника. При этом два самых маленьких числа не могут являться длиной гипотенузы треугольника. Значит, среди четырёх чисел можно найти не более одной отличной тройки.

в) Упорядочим числа по возрастанию. Самое большое из них может быть длиной гипотенузы не более чем в четырёх треугольниках (в противном случае одно из оставшихся 11 чисел будет длиной катета в двух треугольниках с данной гипотенузой, а тогда эти треугольники будут равны по гипотенузе и катету). Аналогично, второе по величине число может быть длиной гипотенузы не более чем в пяти треугольниках, третье и четвёртое — в четырёх, пятое и шестое — в трёх, седьмое и восьмое — в двух, девятое и десятое — в одном. Итого, отличных троек может получиться не более 30.

Тридцать отличных троек найдётся, например, для следующего набора чисел: 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, …, $\sqrt{12}$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 30.

Типичные ошибки в решениях задачи 21

1. Одним из распространенных вариантов записей «решения» задачи 21 в 2015 году было отсутствие каких-либо пояснений к ответу.

Пример1.

21. а) нет

б) да

в) 99.

Рис. 16.1.

Комментарий: На ненулевой балл решение, согласно критериям, могло претендовать, если верный ответ *получен* хотя бы в одном из пунктов. Проиллюстрированное в примере 1 решение не описывает процесс *получения* верного ответа ни для одного из пунктов.

2.Многие участники ЕГЭ 2015 года, приступившие к решению задачи №21, ограничились пунктом а), приведя пример обосновывающий существование необходимого количества натуральных чисел, не содержащих ни одной хорошей тройки.

Пример2.

а) ~~нет~~ да, например числа

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64

б) нет

в) 10

Рис. 16.2.

Комментарий: С точки зрения формальной логики приведение примера доказывает утверждение с квантором существования. Именно таким утверждением надо считать вопрос пункта а). Однако формальное следование критериям оценивания заданий с развёрнутым ответом 2015 году требует оценки 0 баллов за приведённое в примере 2 решение, поскольку процесс *получения* верного ответа не описан.

Приведём вариант верного решения пункта а), в котором не используется пример, явно подтверждающий существование требуемой последовательности чисел.

Пример3.

21. Чтобы числа могли быть сторонами треугольника, должны выполняться неравенства: $\begin{cases} a+b>c \\ a+c>b \\ b+c>a \end{cases}$, где a, b и c – стороны треугольника.

а) Да, вполне может оказаться, если числа являются арифметической прогрессией с формулой $a_n = a_{n-2}+a_{n-1}$, где $n>2$ и $n \in Z$. Если же каждое последующее число по возрастанию будет меньше суммы двух предыдущих, то хорошие тройки появятся.

б) Числа должны удовлетворять системам:
$\begin{cases} a+b>c \\ a+c>b \\ b+c>a \end{cases}$ и $\left[\begin{array}{l} a^2+b^2=c^2 \\ a^2+c^2=b^2 \\ b^2+c^2=a^2 \end{array}\right.$

Ответ: а) Да.

Рис. 16.3

Комментарий: В решении описывается способ получения требуемой последовательности чисел. Согласно критериям за пункт а) 1 балл.

Пример 4.

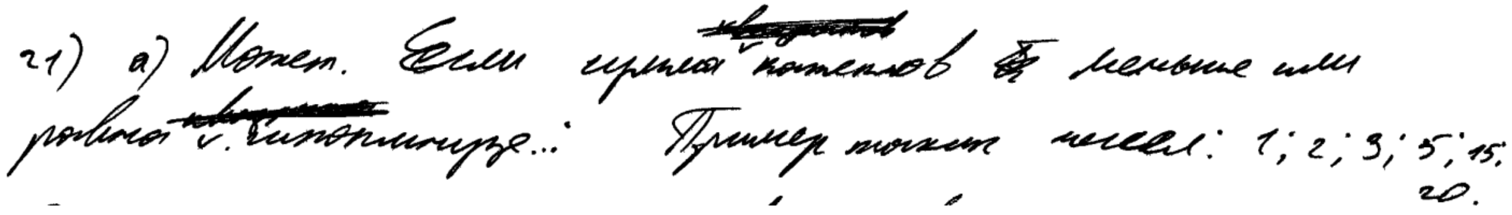
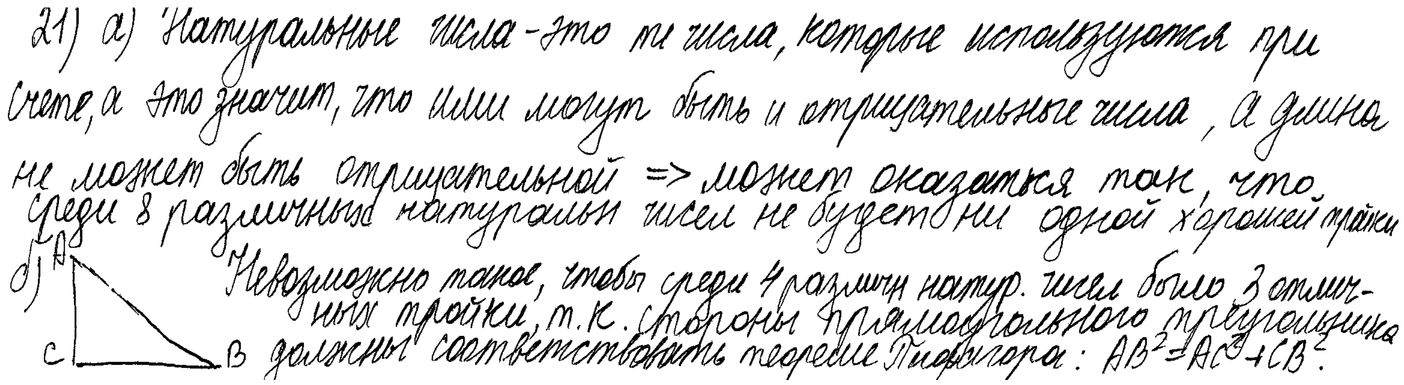

21) а) Может. Если ~~...~~ сумма ~~...~~ катетов ~~...~~ меньше или равна ~~...~~ гипотенузе... Пример таких чисел: 1; 2; 3; 5; 15; 20.

Рис.16.4.

Комментарий: Приведён правильный пример, однако, приведено неверное обоснование. Согласно критериям, 0 баллов.

3.В предложенных в 2015 году решениях задачи № 21 имелись неединичные ошибки, связанные с понятием натурального числа.

Пример 5:


21) а) Натуральные числа - это те числа, которые используются при счете, а это значит, что ими могут быть и отрицательные числа, а длина не может быть отрицательной => может оказаться так, что среди 8 различных натуральн чисел не будет ни одной хорошей тройки

б) Невозможно такое, чтобы среди 4 различн натур. чисел было 3 отлич-ных тройки, т.к. стороны прямоугольного треугольника должны соответствовать теореме Пифагора: $AB^2=AC^2+CB^2$.

Рис. 16.5

Комментарий: Решение содержит противоречивые утверждения. Согласно общим методическим рекомендациям разработчиков ЕГЭ, это недопустимо. Оценка 0 баллов.

ВЫВОДЫ:

Анализ работ 2015 года позволил констатировать несколько положительных результатов ЕГЭ по математике.

1. Овладение значительной частью выпускников школ, участвовавших на экзамене базового уровня, умениями использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, умениями строить и исследовать простейшие математические модели, умениями выполнять действия с функциями. Достигнут наилучший за последние годы показатель решения задачи на геометрический смысл производной.
2. Демонстрация значительной частью участников экзамена по математике профильного уровня достаточного уровня сформированности умений использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, умениями выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами.
3. При решении задачи 15 участниками экзамена профильного уровня положительная тенденция состоит в уверенном владении учащимися многими способами отбора корней тригонометрического уравнения из указанного промежутка: с помощью единичной окружности, с помощью графика тригонометрической функции, с помощью числовой прямой, решая двойное линейное неравенство, перебором. Немало учащихся демонстрируют полное владение одним из наиболее рациональных (на их взгляд) способов.
4. Достоинством решений задачи 16 значительной частью участников экзамена профильного уровня было активное использование нестандартных (для школьного курса геометрии) способов решения (в том числе, координатный, координатно-векторный способы). Также можно констатировать увеличение количества работ с оригинальным решением задачи 16.
5. Стабильность доли участников экзамена, приступающих к решению задачи с параметрами (задача 20)

Однако, предметная комиссия по математике, проанализировав результаты, выявила ряд недочетов в математической подготовке выпускников школы, значительная часть из которых отмечались и в прошлые годы:

- низкая мотивация учащихся к достижению максимальных результатов на ЕГЭ по математике;
- доминирование подготовки по алгебре над обучением геометрии;

- низкий уровень математической подготовки, не позволяет учащимся успешно осваивать другие предметы естественно-научного цикла, резко снижает общую способность учиться;
- при оформлении решений задач с развёрнутым ответом участились погрешности: неправильные чертежи, недостаточная доказательность рассуждений, отсутствие аргументации решений;
- недостаточно устойчивые навыки использования основных математических методов, отрабатываемых в школьном курсе математики (в частности, применимые для решения задачи 17 метод интервалов и метод введения новой переменной);
- непонимание значительной частью участников экзамена сути требования «доказать» в задаче, в частности, планиметрической задачи 18.
- поверхностный взгляд на условие задачи (в частности, задачи 19 экзамена профильного уровня), склонность упростить его на свой взгляд, неверная трактовка условия задачи;
- недостаточная подготовленность учащихся к решению нестандартных математических задач, включая задачи типа предложенной на экзамене под номером 21.

В этой связи в 2015-2016 учебном году необходимо концентрировать усилия на решении следующих первоочередных задач.

Обеспечить тенденцию повышения качества результатов ЕГЭ с применением комплекса мер, в первую очередь организационно-методического и методического характера, по выявлению потенциальных погрешностей в решении математических задач будущими участниками экзамена 2015 г. и осуществлению соответствующих корректирующих мероприятий.

В связи с наличием определённой доли учащихся, не преодолевших «порогового» значения, необходимо уделять этой группе учащихся большее внимание. С учащимися, имеющими слабую математическую подготовку, стоит сконцентрироваться на формировании их базовых математических компетенций (умении читать и верно понимать условие задачи, решать практико-ориентированные задачи, выполнять арифметические действия, тождественные преобразования и т.д.), определить наиболее успешно решаемые данными учащимися типы задач и доводить, в первую очередь, их решение «до совершенства». Другими словами, для учащихся с разным уровнем подготовки должны быть выстроены принципиально разные стратегии подготовки к экзамену, необходима дифференциация обучения, разработка стратегии обучения и подготовки к выпускному экзамену с учетом уже имеющегося у выпускника уровня образовательной подготовки.

Учителю необходимо планировать обобщающее повторение курса алгебры и начал анализа, традиционно проводимое учителями в конце 11 класса, с учетом основных содержательных линий курса. Кроме того, в связи с тем, что КИМы ЕГЭ проверяют и усвоение материала курсов математики 5 — 6 классов, алгебры 7 — 9 классов и геометрии 7 — 11 классов, необходимо при подготовке к сдаче ЕГЭ повторить некоторые разделы курса математики, алгебры и геометрии основной и средней школы. Ориентиром в планировании могут послужить:

- Кодификатор требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для проведения единого государственного экзамена по математике.
- Кодификатор требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для проведения единого государственного экзамена по математике.
- Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в текущем году единого государственного экзамена по математике.
- Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена текущего года по математике.

5. Работа региональной предметной комиссии.

- **Руководители ПК (ФИО, звания)**

Председатель ПК: И.В. Кисельников – кандидат педагогических наук, доцент Алтайского государственного педагогического университета.

Заместители председателя ПК:

Л.М. Бронникова, кандидат педагогических наук, доцент, заместитель директора института физико-математического образования Алтайского государственного педагогического университета,

О.А. Тыщенко, кандидат педагогических наук, доцент Алтайского государственного педагогического университета,

М.А. Гончарова, кандидат педагогических наук, доцент, заведующая кафедрой математического образования АКИПКРО,

Н.В. Решетникова кандидат педагогических наук, доцент кафедры математического образования АКИПКРО.

- **Характеристика региональной предметной комиссии (ПК) по предмету**

Эксперты предметной комиссии	Количество
Количество экспертов в предметной комиссии, чел.	105

из них: – учителей образовательных организаций – преподавателей учреждений высшего профессионального образования – преподавателей учреждений дополнительного профессионального образования	 62 40 3
Из них: – имеющих учёное звание кандидата наук – имеющих учёное звание доктора наук – имеющих звание «Заслуженный учитель РФ»	 33 0 0
Из них – имеющих статус ведущего эксперта – имеющих статус старшего эксперта – имеющих статус основного эксперта	 12 18 75

– **Организация обучения экспертов и работы ПК**

6. Рекомендации:

– по совершенствованию методики преподавания предмета в субъекте РФ (кроме общих рекомендаций приводятся рекомендации по темам для обсуждения на методических объединениях учителей-предметников, предлагаются возможные направления повышения квалификации, как в системе дополнительного профессионального образования, так и через самообразование).

На основе анализа типичных ошибок в решениях задачи 15 участников ЕГЭ по математике в 2015 году среди причин их появления можно выделить: незнание основных формул корней простейших тригонометрических уравнений, табличных значений тригонометрических функций; невладение понятием множества значений тригонометрической функции, недостаточно развитые вычислительные навыки и навыки тождественных преобразований.

Для предупреждения этих ошибок необходимо при изучении раздела «Тригонометрия» в основной и старшей школе добиваться от учащихся абсолютного знания всех основных теоретических сведений этого раздела, так как это служит основой успешного преобразования тригонометрического выражения, решения тригонометрического уравнения и неравенства, присутствующих в КИМах профильного ЕГЭ по математике.

На основе анализа типичных ошибок в решениях задачи 16 участников ЕГЭ по математике в 2015 году среди причин их появления можно выделить недостаточное владение теоретическим материалом, отсутствие потребности в ссылках на теоретические положения.

Для предупреждения этих ошибок целесообразно при изучении геометрии в основной и старшей школе требовать от учащихся указания (письменно) и формулировок (устно) используемых аксиом, определений, теорем, свойств, признаков при решении каждой задачи.

На основе анализа типичных ошибок в решениях задачи 17 участников ЕГЭ по математике в 2015 году можно констатировать следующее. Участники продемонстрировали различные методы решения неравенств предложенного типа, однако, при этом многие учащиеся получили за данную задачу нулевой балл. Многие из приступивших к решению задачи №17, очевидно, имеют не достаточно устойчивые навыки использования метода интервалов и метода введения новой переменной при решении неравенств, ошибаются при выполнении преобразований показательных выражений. Имеет смысл, отрабатывать более тщательно применение метода введения вспомогательной переменной при решении неравенств, делая акцент на отличиях от уравнений, решаемых тем же способом. В частности, необходимо обращать внимание учащихся на то, что множество решений неравенства, полученного при введении вспомогательной переменной, целесообразно записать в виде одного или нескольких элементарных неравенств, в которых и возвращаться к исходной переменной. Запись же решений промежуточного неравенства в виде числовых промежутков, часто не позволяет выпускникам продолжить решение.

На основе анализа типичных ошибок в решениях задачи № 18 (С4) участников ЕГЭ по математике в 2015 году можно констатировать слабое знание геометрических фактов раздела «Планиметрия», в некоторых случаях - непонимание сути требования «доказать».

Для минимизации и предупреждения этих недостатков желательно с самого начала изучения геометрии в 7 классе повышать уровень требований от учащихся:

- знания геометрических фактов;
- умения опровергать неверные утверждения приведением контрпримера;

- критического отношения к возникающим в процессе изучения геометрии правдоподобным рассуждениям;
- умения различать доказательство от правдоподобного рассуждения;
- умения детально анализировать условие задачи, правильно выделять известные и искомые компоненты;
- умения четко выделять, теоретически обосновывать и грамотно записывать все шаги решения задачи.

На основе анализа типичных ошибок в решениях задачи № 20 участников ЕГЭ по математике в 2015 году можно констатировать следующее. Задачи с параметрами уже не являются настолько изолированными от традиционной школьной математики, как это было всего несколько лет назад. Отчасти этому способствовало включение задач такого типа в ЕГЭ. Стабильное количество участников ЕГЭ берутся за решение этих задач. И всё-таки задачи этого типа объективно сложны и справедливо считаются задачами не для всех. Формирование понятия параметра с одной стороны длительный процесс. Научить школьников решать задачи с параметром, посвятив этой теме только несколько уроков в конце 11 класса, как правило, не удаётся. Эта тема требует более продолжительного времени для усвоения. Вместе с тем для успешного решения задач с параметрами необходимо наличия у учащихся обширного опыта решения уравнений различных типов, исследования различных функциональных зависимостей и не может быть полноценно организовано при отсутствии такого опыта. В связи с этим представляется целесообразным следующий подход. При изучении каждого типа уравнений (неравенств, функций и т.п.), входящих в программу основной и старшей школы, задействовать хотя бы минимально задачи с параметрами. Авторы действующих учебников предлагают соответствующий материал. Далее на завершающем этапе обучения при повторении линии уравнений и неравенств обобщить накопленный таким образом опыт. Заметим также, что такой подход позволит способным ученикам самостоятельно, получив заранее первоначальные представления о задачах с параметрами, накапливать опыт их решения.

На основе анализа типичных ошибок в решениях задачи № 21 участников ЕГЭ по математике в 2015 году можно рекомендовать следующее.

Избавлению от части недостатков, проявившихся при решении задачи №21, вероятно, способствовала бы лучшая осведомленность учащихся об общих требованиях к оценке заданий этого типа.

Кроме того, накопление опыта решения нестандартных математических задач повысит вероятность успешного решения заданий ЕГЭ высокого уровня сложности, к которым относится и задача №21.

– по совершенствованию КИМ ЕГЭ по предмету (в том числе и по совершенствованию критериев оценивания заданий с развернутым ответом).

Целесообразно включение в состав задач, требующих развёрнутого решения, стандартных задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

7. Составители отчета о результатах методического анализа:

Председатель предметной комиссии	И.В. Кисельников, Алтайский государственный педагогический университет, начальник отдела мониторинга и контроля качества управления лицензирования и аккредитации, кандидат педагогических наук, доцент
Заместитель председателя предметной комиссии	Л.М. Бронникова, Алтайский государственный педагогический университет, заместитель директора института физико-математического образования, доцент
Заместитель председателя предметной комиссии	О.А. Тыщенко, Алтайский государственный педагогический университет, доцент кафедры алгебры и методики обучения математике, кандидат педагогических наук, доцент